# Лекция №12

## Раздел 2. Этапы построения математической модели.

## Практическое использование построенной модели и анализ результатов моделирования

Дескриптивные модели, рассмотренные в данной главе, предназначены для описания исследуемых параметров некоторого явления или процесса, а также для изучения закономерностей изменения этих параметров. Данные модели могут использоваться

- для изучения свойств и особенностей поведения исследуемого объекта при различных сочетаниях исходных данных и при различных режимах;
- как моделирующие блоки в различных системах автоматизированного проектирования (САПР) и управления (АСУ);
- при построении оптимизационных моделей и моделей-имитаторов сложных систем и комплексов.

Модели, разрабатываемые для исследовательских целей, как правило, не доводятся до уровня программных комплексов, предназначенных для передачи сторонним пользователям. Поэтому время их существования ограничено временем выполнения исследовательских работ по соответствующему направлению. Эти модели отличает поисковый характер, применение новых вычислительных процедур и алгоритмов, неразвитый программный интерфейс. Модели и построенные на их основе программные комплексы, предназначенные для передачи сторонним пользователям или для коммерческого распространения, имеют развитый дружественный интерфейс, мощные пре- и постпроцессоры. Данные модели строятся, как правило, на апробированных и хорошо себя зарекомендовавших постановках и вычислительных процедурах. Программные комплексы имеют подробные и качественно составленные описания и руководства для пользователя, по всем неясным вопросам фирма-производитель проводит консультации. Однако следует помнить, что такие коммерческие модели предназначены только для решения четко оговоренного класса задач, как правило, не имеют возможностей по модернизации и совершенствованию, привязаны к определенному классу вычислительных устройств и периферийному оборудованию. Так, пользователь не имеет возможности самостоятельно расширять библиотеку используемых численных методов или изменять систему исходных гипотез.

Независимо от области применения разработанной модели группа разработчиков обязана провести качественный и количественный анализ результатов моделирования. Подобный анализ может преследовать несколько целей

- Работая с моделью, разработчики становятся специалистами в области знаний, связанной с объектом моделирования. Они начинают достаточно хорошо представлять свойства объекта, предсказывать и объяснять его поведение, в некотором смысле они могут даже представлять себя в роли объекта моделирования. Поэтому всесторонний анализ результатов моделирования может позволить выполнить модификацию рассматриваемого объекта, найти его оптимальные характеристики или, по крайней мере, лучшим образом учитывать его поведение и свойства.
- Качественный и количественный анализ результатов моделирования позволяет обозначить область применения модели, что особенно важно в случае использования моделей для систем автоматического управления.
- Подобный анализ позволит проверить обоснованность гипотез, принятых на этапе математической постановки, оценить возможность упрощения модели с целью повышения ее эффективности при сохранении требуемой точности.
- Наконец, выполненный анализ может показать, в каком направлении следует развивать модель в дальнейшем.

Пример

**Анализ результатов решения задачи о баскетболисте**

Соотношения (2.10)-(2.12) представляют аналитическое решение задачи о баскетболисте. Если в зависимость для координаты y(t) подставить x(t), то получим уравнение параболы, описывающее траекторию мяча. Приравнивая нулю левую часть в соотношении для y(t), определяем время полета мяча на дальность L

$$T = 2\frac{v_0}{g}\sin\ \alpha_0 . \qquad (2.13)$$

Наивысшей точки траектории мяч достигает в момент T/2. При этом максимальная высота мяча (высота траектории) равна

$$H = \frac{v_0^2}{2g}\sin\ \alpha_0 . \qquad (2.14)$$

Анализ соотношения (2.11) позволяет заключить, что максимальная дальность броска достигается при угле бросания в 45 градусов и равна

$$L_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \quad . \tag{2.15}$$

Зададим в (2.12) точность $\Delta=0$ и из полученного уравнения найдем начальную скорость мяча при угле бросания в 45 градусов, обеспечивающую "абсолютную" точность

$$v_{45}^2 = g\, x_k \,. \tag{2.16}$$

Запишем соотношения для дальности и точности броска в безразмерном виде. Относительную дальность l броска определим как отношение дальности броска к максимальной дальности

$$l = \frac{L}{L_{\max}} = \sin\, 2\alpha_0 \le 1 \quad . \tag{2.17}$$

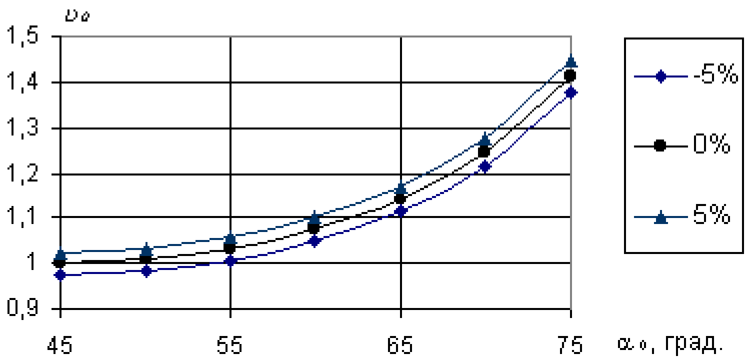
Относительную точность $\delta$ введем как отношение отклонения $\Delta$ к расстоянию до центра корзины

$$\delta = \frac{\Delta}{x_k} = \frac{L}{x_k} - 1 = \frac{v_0^2}{g\, x_k}\sin\, 2\alpha_0 - 1 = \left(\frac{v_0}{v_{45}}\right)^2 \sin\, 2\alpha_0 - 1 = \varepsilon_0^2 \sin\, 2\alpha_0 - 1 \quad , \tag{2.18}$$

где $\varepsilon_0 = \dfrac{v_0}{\sqrt{g\, x_k}} > 0$ - относительная начальная скорость мяча.

Представление разрешающих соотношений модели в безразмерном виде более удобно для анализа. Из соотношения (2.18) видно, что заданную величину относительной точности броска можно получить при двух значениях угла бросания, обеспечивающих *настильную* (при $\alpha_0 < 45^0$) и *навесную* (при $\alpha_0 > 45^0$) траектории движения мяча. При $\alpha_0 = 45^0$ указанные траектории совпадают. Для обеспечения одинаковой точности для навесной и настильной траектории начальные скорости мяча должны быть одинаковы. С точки зрения попадания мяча в кольцо навесная траектория является предпочтительней по сравнению с настильной, так как даже при ударе мяча о кольцо вероятность попадания в корзину в этом случае выше. Иначе говоря, допуск на отклонение траектории мяча от центра кольца для навесной траектории больше, чем для настильной. Поэтому настильные траектории можно исключить из дальнейшего рассмотрения как менее выгодные. Для навесной траектории в первом приближении можно принять, что мяч попадает в кольцо, если отклонение траектории от цента кольца не превышает половины радиуса мяча.

Задаваясь величиной относительной точности и обозначая, из соотношения (2.18) можно получить оценку для разброса относительной начальной скорости




$$K_\alpha(1-\delta) \le \upsilon_0^2 \le K_\alpha(1+\delta), \quad (2.19)$$

где $K_\alpha = 1/\sin 2\alpha_0 \ge 1$ - коэффициент угла бросания.

Рис. 2.1. Зависимость $\upsilon_0(\alpha_0)$ при относительной точности $\delta$ = 5%

Учитывая, что при отклонении $\alpha_0$ от $45^0$ $K\alpha$ в (2.19) увеличивается, можно заключить, что при этом допуск на разброс значений начальной скорости при фиксированном значении $\alpha_0$ будет также увеличиваться. Правда, при этом во столько же раз увеличивается и сама величина относительной начальной скорости броска. Например, при $\alpha_0 = 75^0$ относительная начальная скорость увеличится в $\sqrt{2}$ раз по сравнению со значением скорости при $\alpha_0 = 45^0$. Однако и допустимая величина разброса скорости также увеличится в $\sqrt{2}$ раз. С другой стороны, при фиксированном значении начальной скорости и точности броска, допустимый интервал разброса значений угла бросания $\alpha_0$ максимальный (около $10^0$ при $\delta$ = 5%) для $\upsilon_0 = 1$ и сужается с увеличением $\upsilon_0$ (всего $1{,}7^0$ при $\upsilon_0 = 1{,}4$). Данное обстоятельство позволяет заключить, что броски под углом, близким к $45^0$, более предпочтительны, чем броски при больших значениях угла.

В заключении оценим параметры броска для реальных размеров, оговоренных в международных правилах для баскетбола. В соответствии с принятыми в баскетболе правилами длина окружности мяча может изменяться от 0,749 до 0,780 м, что соответствует изменению радиуса мяча от 0,119 до 0,124 м. Масса мяча должна лежать в пределах от 0,567 до 0,650 кг.

Примем для определенности радиус мяча равным R=0,12 м, а массу мяча m=0,6 кг. Внутренний радиус кольца корзины равен $r_k$= 0,225 м. В соответствии с высказанными ранее допущениями об условиях попадания мяча в корзину допустимое отклонение траектории мяча от центра корзины составит $\Delta_{max}=r_k-R/2$ = 0,165 м. Расстояние от линии штрафных бросков до центра кольца корзины равно 4,225 м. Принимая данную величину в качестве $x_k$, можно определить значение предельной относительной точности броска $\delta_{max}=\Delta_{max}/x_k$=0,039 или 3,9%. Используя соотношение (2.19) и найденную величину предельной относительной точности броска, можно оценить начальную скорость мяча при штрафном броске и допустимый интервал ее изменения при угле бросания в $45^0$: $v_0$=6,44±0,25 м/с.

Интересно также выполнить оценку параметров "трехочкового" броска, который выполняется из-за линии, расположенной на расстоянии 6,25 м от центра кольца корзины. Предельная относительная точность броска в этом случае не более 2,64%. Величина начальной скорости при угле бросания в $45^0$ равна соответственно $v_0$=7,83±0,21 м/с.

В табл. 2.1 для угла бросания $45^0$ представлены параметры броска в зависимости от расстояния до кольца. Из приведенных результатов наглядно видно, что при увеличении дальности броска на 10 м начальная скорость броска возрастает более чем в 3 раза. При этом допустимое отклонение в значении начальной скорости уменьшается более чем в 3 раза.

Таблица 2.1.

| $x_k$, м | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **δ, %** | 16,5 | 5,5 | 3,3 | 2,3 | 1,8 | 1,5 |
| **$v_0$, м/с** | 3,13 | 5,42 | 7,00 | 8,29 | 9,40 | 10,39 |
| **$\pm\Delta v$, м/с** | 0,52 | 0,30 | 0,23 | 0,20 | 0,17 | 0,16 |