

Лекция №5

Раздел 1. Основные понятия. Технологии построения моделей.

КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Классификация в зависимости от параметров модели

В общем случае параметры, описывающие состояние и поведение объекта моделирования, разбиваются на ряд непересекающихся подмножеств:

- совокупность входных (управляемых) воздействий на объект (Ω_x);
 - совокупность воздействий внешней среды (неуправляемых) (Ω_E);
 - совокупность внутренних (собственных) параметров объекта (Ω_I);
- совокупность выходных характеристик (Ω_y).



Рис. 5 Параметры модели

Например, при моделировании движения твердого тела в атмосфере в поле сил тяжести в качестве входных параметров могут выступать начальное положение и начальная скорость точки, принятой за полюс, и угловая скорость в момент времени $t=0$. Сила сопротивления и сила тяжести характеризуют воздействие внешней среды. Масса тела и его форма являются собственными параметрами тела. Координаты и скорости точек тела (при $t>0$) относятся к выходным величинам. В то же время отнесение параметров к тому или иному типу зависит от

постановки конкретной задачи. Например, в приведенном примере можно переформулировать задачу, сделав ее обратной к исходной: определить начальное положение и скорости (линейную скорость полюса и угловую скорость тела) по заданному положению и скоростям в момент времени $t_1 > 0$. Понятно, что при этом входные и выходные параметры меняются местами.

Следует отметить, что количество параметров всех типов в математических моделях, как правило, конечно. При этом каждый из параметров может иметь различную “математическую природу”: быть постоянной величиной или функцией, скаляром или вектором (или тензором второго, третьего и выше рангов), четким или нечетким множеством и т.д. В математических моделях, рассматриваемых в естественных науках, наиболее распространенными являются параметры, являющиеся скалярно - или тензор – значными функциями. В качестве независимых переменных (аргументов) при этом обычно выступают координаты точек трехмерного пространства и/или время (или некоторый неубывающий параметр – аналог времени).

Входные параметры X , параметры, описывающие воздействие внешней среды E , и внутренние (собственные) характеристики I объекта относятся к *независимым (экзогенным)* величинам. Выходные параметры Y являются *зависимыми (эндогенными)* величинами.

В общем случае оператор модели A преобразует экзогенные параметры в эндогенные A : $\{X, E, I\} \rightarrow Y$.

Введение тех или иных количественных характеристик объекта моделирования возможно при наличии некоторого эталона сравнения. Например, для характеристики размеров тела используется эталонный образец — метр. По своей природе характеристики объекта могут быть как качественными, так и количественными. Для количественной характеристики вводятся числа, выражающие отношения между данным параметром и эталоном. Кроме того, количественные значения параметра могут выражаться дискретными или непрерывными величинами. Качественные характеристики находятся, например, с помощью метода экспертных оценок. В зависимости от вида используемых множеств параметров модели могут различаться на *качественные* и *количественные*, *дискретные* и *непрерывные*, а также *смешанные*.

При построении моделей реальных объектов и явлений очень часто приходится сталкиваться с недостатком информации. Как правило, для любого исследуемого объекта распределение свойств, воздействия и начальное состояние известны с той или иной степенью неопределенности. Это связано с множеством трудно учитываемых факторов, с ограниченностью числа используемых параметров модели, с конечной точностью экспериментальных измерений. При построении модели описание неопределенности параметров может быть осуществлено следующими способами:

1. *детерминированное* – значения всех параметров модели определяются детерминированными величинами (т.е. каждому параметру соответствует конкретное целое, вещественное или комплексное число или соответствующая функция). Данный способ соответствует полной определенности параметров;
2. *стохастическое* – значения всех или отдельных параметров модели определяются случайными величинами, заданными плотностями вероятности. В литературе наиболее полно исследованы случаи нормального (гауссова) и показательного распределения случайных величин;
3. *случайное* – значения всех или отдельных параметров модели устанавливаются случайными величинами, заданными оценками плотностей вероятности, полученными в результате обработки ограниченной экспериментальной выборки данных параметров. Данная форма описания тесно связана с предыдущей. Однако в данном случае получаемые результаты моделирования будут существенным образом зависеть от точности оценок моментов и плотностей вероятности случайных параметров, от постулируемых законов распределения, объема выборок;
4. *интервальное* - значения всех или отдельных параметров модели описываются интервальными величинами, заданными интервалом, образованным минимальным и максимально возможными значениями параметра;
5. *нечеткое* - значения всех или отдельных параметров модели описываются функциями принадлежности соответствующему нечеткому множеству. Такая форма используется, когда информация о параметрах модели задается экспертом на естественном языке, а следовательно, в “нечетких” (с позиции математики) терминах типа “много больше пяти”, “около нуля”.

Совокупность значений параметров модели в некоторый момент времени или на данной стадии называется *состоянием объекта*.

Деление параметров на стационарные и нестационарные используется для моделей, где одним из независимых аргументов может являться время или неубывающий параметр, характеризующий “направление” процесса или последовательность его стадий.

Рассмотрим течение жидкости в длинной трубе постоянного сечения. Эксперименты показывают, что на достаточно большом удалении от входа в трубу частицы жидкости движутся параллельно оси трубы.

При этом если условия на входе не изменяются и скорость течения невелика, то профиль скоростей частиц в данном сечении трубы с течением времени остается неизменным. В этом случае можно говорить о *стационарном* движении жидкости в трубе, характеристики движения

которой в каждой точке пространства не зависят от времени. Как правило, стационарные модели применяются для описания различных потоков (жидкости, газа, тепла) в случае постоянства условий на входе и выходе потока. Процессы, для которых состояние объекта в каждой фиксированной точке пространства не изменяется с течением времени, называются стационарными. Для таких процессов время может быть исключено из числа независимых переменных.

Если в качестве одной из существенных независимых переменных модели необходимо использовать время (или его аналог), то модель называется *нестационарной*. Примером нестационарной модели является движение жидкости в трубе, но вытекающей из некоторого сосуда. По мере понижения уровня жидкости в сосуде давление на входе в трубу будет уменьшаться, что приведет к изменению параметров течения жидкости в самой трубе. Обычно такие модели значительно сложнее стационарных и требуют больших временных затрат для своей реализации на ЭВМ.

Очень часто параметры, характеризующие состояние объекта исследования, изменяются при переходе от одной точки объекта к другой, образуя пространственные поля значений. В заданной исследователем системе координат подобные полевые параметры являются функциями координат.

Разделение моделей на *одномерные*, *двумерные* и *трехмерные* применимо для моделей, в число параметров которых входят координаты пространства, и связано с особенностями реализации данных моделей, равно как и с увеличением их сложности при возрастании размерности. Как правило, увеличение размерности модели приводит к увеличению числа используемых математических соотношений. Особенно сложны в реализации трехмерные модели, требующие высокопроизводительной вычислительной техники с большим объемом оперативной и дисковой памяти. Реализация таких моделей стала возможной лишь с появлением вычислительных машин третьего поколения и потребовала создания специальных вычислительных методов и приемов. Среди характерных вычислительных трудностей, с которыми сталкиваются при создании моделей в трехмерной постановке, можно отметить необходимость хранения и решения систем уравнений большой размерности (10 тысяч уравнений и более), проблема подготовки исходной информации и ее проверка, наглядное отображение полученных результатов. При разработке модели стараются (если это возможно) понизить размерность. Однако необоснованное понижение размерности модели может существенно исказить результаты моделирования. Например, если для исследования движения брошенного мяча в вертикальной плоскости использование двумерной модели может быть оправдано, то для исследования движения бумеранга двумерную модель строить бесполезно.