Лекция №4

Раздел 1. Основные понятия. Технологии построения моделей.

КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Бурное развитие методов математического моделирования и многообразие областей их использования привело к появлению огромного количества моделей самого разного типа. В связи с этим возникает необходимость в определенном упорядочивании, классификации существующих и появляющихся математических моделей. Учитывая большое число возможных классификационных признаков и субъективность их выбора, появление все новых классов моделей, следует отметить условность и незавершенность рассматриваемой ниже классификации.

Представляется возможным подразделить математические модели на различные классы в зависимости:

- от сложности объекта моделирования;
- от оператора модели (подмодели);
- от входных и выходных параметров;
- от способа исследования модели;
- от цели моделирования.

Классификация в зависимости от сложности объекта моделирования

В качестве объекта моделирования может выступать как некоторое материальное тело или конструкция, так и природный, технологический или социальный процесс или явление. Все объекты моделирования можно разделить на две группы: простые и объекты-системы (см. Рис. 3). В первом случае при моделировании не рассматривается внутреннее строение объекта, не выделяются составляющие его элементы или подпроцессы. В качестве примера подобного объекта можно привести материальную точку в классической механике.

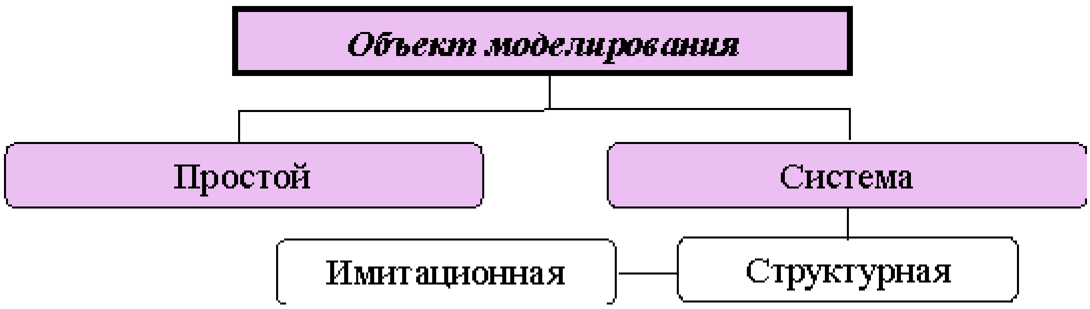
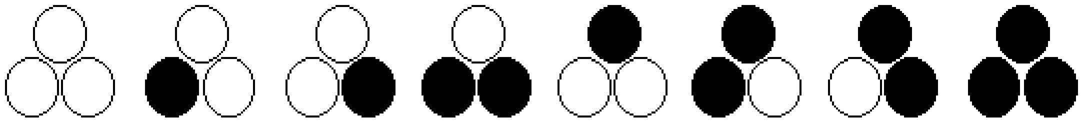


Рис. 3 Объекты моделирования

Система есть совокупность взаимосвязанных элементов, в определенном смысле обособленная от окружающей среды и взаимодействующая с ней как целое.

Для сложных систем характерно наличие большого числа взаимно связанных, взаимодействующих между собой элементов. При этом связь между элементами **A** и **B** системы может отличаться от связи между элементами **B** и **A.** Если система имеет **N** элементов и каждый элемент связан с каждым, то общее число связей равно $\mathbf{N(N-1)}$. Если все **N** элементов имеют по **M** состояний, то общее число состояний **S** для такой системы равно $\mathbf{M^N}$. Например, для системы при **M=2** и **N=3** имеем $\mathbf{S = 2^3 = 8}$ состояний.



Максимальное число связей в подобной системе равно **6**. Если поведение системы описывается процессом перехода из одного состояния в другое, то общее число возможных переходов равно $\mathbf{S^2}$. Для рассматриваемого примера число сценариев возможного поведения системы равно $\mathbf{S = 8^2 = 64}$.

Поведение системы быстро усложняется с ростом числа элементов системы. Так, для системы из **10** элементов при **M=2** число состояний **S** равно **1024**, а число сценариев **1 048 576**. Данное обстоятельство, с одной стороны, говорит о сложности систем и многовариантности их поведения. С другой стороны, следует ожидать наличия больших трудностей, возникающих при изучении и моделировании систем.

Конечно, деление объектов исследования на “простые” и “сложные” условно. Поскольку для любых известных процессов, явлений, материальных тел невозможно выделить их “элементарные кирпичики”, “атомы”, то любой объект исследования можно считать бесконечно сложным. “Упрощение” его строения при разработке модели выполняется в результате отбрасывания малозначимых, несущественных для достижения поставленных на данный момент целей исследования связей между составляющими объект элементами. При изменении целей исследования или повышения требований к точности моделирования приходится, как правило, пересматривать уровень детализации объекта.

Модели объектов-систем, учитывающие свойства и поведение отдельных элементов, а также взаимосвязи между ними, называются *структурными*. Структурные динамические модели выделяют в отдельный класс *имитационных* систем; при этом рассматриваются системы, состоящие из конечного числа элементов, каждый из которых имеет конечное число состояний. Число связей между элементами также предполагается конечным. Моделирование взаимодействий элементов системы друг с другом осуществляется с помощью некоторого алгоритма, реализуемого обычно с использованием ЭВМ. Для моделирования на ЭВМ реального времени вводится понятие *системного времени*. В качестве моделей отдельных элементов могут быть использованы модели любого типа.

Как правило, взаимодействие внешней среды со сложной системой полностью проследить не удается, что приводит к неопределенности внешних воздействий и, как следствие, неоднозначности в поведении самой системы. Наличие подобной неопределенности является характерной особенностью сложных систем, учитываемой при моделировании, например, с использованием генераторов случайных чисел.

Классификация в зависимости от оператора модели

В зависимости от оператора математические модели можно разделить как на линейные и нелинейные, так и в соответствии с конкретным видом оператора (рис. 4).

Любая математическая модель, как отмечено выше, может рассматриваться как некоторый оператор **A**, который является алгоритмом или определяться совокупностью уравнений (алгебраических, обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), систем ОДУ (СОДУ), дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) и других).

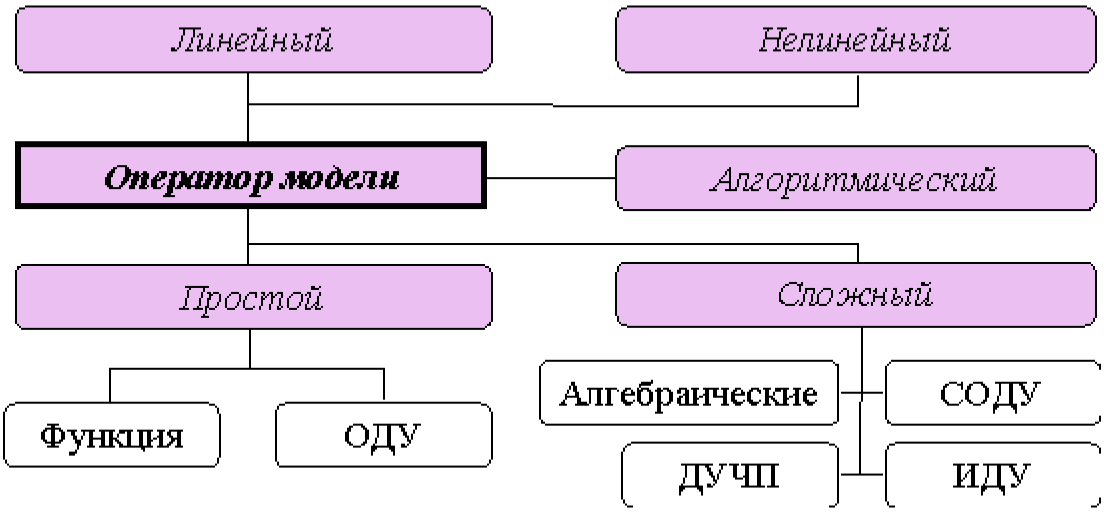


Рис. 4 Объекты моделирования

Если оператор обеспечивает линейную зависимость “выходных” параметров **Y** от значений “входных” параметров **X**, то математическая модель называется *линейной*. Линейные модели более просты для анализа. Например, из свойства линейности следует свойство суперпозиции решений, то есть если известны решения $\mathbf{Y_1}$ при $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{Y_2}$ при $\mathbf{X_2}$, то решение для “выходных” параметров при $\mathbf{X=X_1+X_2}$ есть $\mathbf{Y=Y_1+Y_2}$. Предельные значения **Y** для линейных моделей достигаются, как правило, на границах областей **Ωх** допустимых значений “входных” параметров.

Исторически первыми стали разрабатываться и исследоваться именно линейные математические модели. Область применения подобных моделей очень широка. Она охватывает классическую механику, электродинамику, аналитическую химию и биологию. Методы их решения, разрабатывавшиеся в течение столетий, обладают большой общностью и эффективностью.

Линейное поведение свойственно относительно “простым” объектам. Системам, как правило, присуще нелинейное многовариантное поведение. В настоящее время все чаще возникает потребность не только в повышении точности моделирования, но и создании качественно новых моделей, учитывающих нелинейность поведения реальных объектов исследования. Анализ подобных моделей намного сложнее, чем линейных, причем создание методики и общих подходов к их исследованию в настоящее время далеко от завершения.

В зависимости от вида оператора математические модели можно разделить на *простые* и *сложные*.

В случае, когда оператор модели является алгебраическим выражением, отражающим функциональную зависимость выходных параметров **У** от входных **Х**, модель будем называть простой моделью.

Простые модели чаще всего являются результатом обобщения и анализа экспериментальных данных, полученных в результате наблюдений за исследуемым объектом или явлением. На основании анализа таких данных выдвигается гипотеза о возможной функциональной связи входных и выходных параметров. После этого данная гипотеза проверяется на имеющемся экспериментальном материале, уточняется степень ее адекватности (т.е. степень соответствия результатов моделирования, полученных с применением данной гипотезы, имеющимся знаниям об исследуемом объекте). Если результаты проверки неудовлетворительны, то принятая гипотеза отвергается и заменяется новой. Процесс повторяется до получения желаемой степени соответствия результатов эксперимента и модели. В качестве примеров простых моделей можно привести многие законы физики (закон всемирного тяготения, закон Ома, закон Гука, закон трения Амонтона-Кулона), а также все эмпирические (т.е. полученные из опыта) алгебраические зависимости между входными и выходными параметрами. Так, в теории резания металлов очень часто используются соотношения, связывающие время и стоимость обработки детали на станке в зависимости от скорости ее вращения (скорости резания) и скорости осевого перемещения (скорости подачи) детали.

Модель, включающая системы дифференциальных и интегральных соотношений, уже не может быть отнесена к простым, так как для своего исследования требует применения довольно сложных математических методов. Однако в двух случаях она может быть сведена к простым:

1. если полученная для подобной модели система математических соотношений может быть разрешена аналитически, то результат решения может рассматриваться как простая модель;
2. если результаты вычислительных экспериментов со сложной моделью аппроксимированы некоторой алгебраической зависимостью. В настоящее время известно достаточно большое количество подходов и методов аппроксимации (например, метод наименьших квадратов или метод планирования экспериментов).

На практике довольно часто возникают ситуации, когда удовлетворительное описание свойств и поведения объекта моделирования (как правило, сложной системы) не удается выполнить с помощью математических соотношений. Однако в большинстве случаев можно построить некоторый имитатор поведения и свойств такого объекта с помощью алгоритма, который можно считать оператором модели.

Например, если в результате наблюдения за объектом получена таблица соответствия между “входными” **X** и “выходными” **Y** значениями параметров, то определить оператор **A**, позволяющий получить “выход” по заданному “входу”, зачастую бывает проще с помощью алгоритма.