

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Національний аерокосмічний університет**  
**ім. М. Є. Жуковського**  
**"Харківський авіаційний інститут"**

**ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ.**  
**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ**  
**Робочий зошит**

---

прізвище

---

ім'я та по батькові

---

назва навчального підрозділу (курс, факультет, група)

---

навчальний рік, семестр

Харків "ХАІ" 2006

Затверджено методичною комісією університету  
15 грудня 2005 року (протокол N 4)

Укладачі:

І. В. Брисіна,  
О. В. Головченко,  
В. Ф. Деменко,  
Ю. О. Крашаниця,  
О. Г. Ніколаєв,  
В. С. Проценко,  
В. О. Рвачов,  
В. Т. Сікульський,  
Є. П. Томілова,  
О. Г. Ушакова,  
В. В. Хоменко

ві  
но  
да  
Г  
до  
ві  
ст  
к  
т  
с  
м  
на  
да  
р  
с  
м  
р

## Передмова

Третя частина робочого зошита призначена для студентів університету і відповідає програмі другого семестру.

Як і попередні випуски, цей зошит повинен сприяти ритмічності навчального процесу, надавати навчально-методичну допомогу студентам і викладачам, а також значною мірою ліквідувати наявний брак підручників.

Робочий зошит містить систематичні підбірки вправ і прикладів з інтегрального числення функцій, диференціальних рівнянь, включаючи методи дослідження стійкості розв'язків.

Робочий зошит поділено на окремі заняття, кожне з яких присвячене вивченню окремої теми. В свою чергу, кожне заняття складається з достатнього переліку теоретичних, як правило, альтернативних, джерел, прикладів і вправ для аудиторної, самостійної або домашньої роботи. Кожна тема-заняття побудована таким чином, щоб максимально використати послідовність вивчення від простого до складного. Майже всі вправи у зошиті мають відповіді, а деякі (складні) – методичні вказівки.

Викладеного у робочому зошиті матеріалу цілком достатньо для розуміння теоретичних положень і набуття необхідних навичок розв'язування задач з програмної тематики. Незначна невідповідність обсягу годин, на який розрахований даний робочий зошит, до фактичного обсягу годин на окремих спеціальностях коректується викладачем у робочому порядку.

Сподіваємось, що цей робочий зошит допоможе у вивченні вищої математики, успішному складанні іспитів, а також подальшому фаховому використанні.

Заняття 1  
Найпростіші методи інтегрування.  
Метод внесення під знак диференціалу

1.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками до теми.

1.2. Завдання для роботи в аудиторії.

Використовуючи властивості та таблицю невизначених інтегралів, знайти інтеграли:

1.2.1.  $\int (x^2 + 3x + 1)(2x - 1) dx.$

Відповідь:  $\frac{x^4}{2} + \frac{5}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - x + C.$

1.2.2.  $\int \left( \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}} \right)^3 dx.$

Відповідь:  $\frac{2}{11}x^{11/2} - \frac{6}{7}x^{7/2} + 2x^{3/2} + 2x^{-1/2} + C.$

1.2.3.  $\int \frac{x^4 + x + 1}{x - 1} dx.$

Відповідь:  $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln |x - 1| + C.$

1.2.4.  $\int \frac{2x^2 + 1}{x^2(x^2 + 1)} dx.$

Відповідь:  $-\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C.$

$$1.2.5. \int \frac{2^x + 2^{-x}}{3^x} dx.$$

I.

В, знай-

$$\text{Відповідь: } \left(\frac{2}{3}\right)^x \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} - \frac{6^{-x}}{\ln 6} + C.$$

$$1.2.6. \int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$\text{Відповідь: } \operatorname{tg} x - x + C.$$

$$1.2.7. \int \sin^2 x dx.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$1.2.8. \int \operatorname{ch}^4 \frac{x}{2} dx.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{3}{8}x + \frac{1}{2} \operatorname{sh} x + \frac{1}{16} \operatorname{sh} 2x + C.$$

За методом внесення під знак диференціалу знайти інтеграли:

1.2.9.  $\int \cos 5x dx.$

Відповідь:  $\frac{1}{5} \sin 5x + C.$

1.2.10.  $\int \frac{x}{x^2+1} dx.$

Відповідь:  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$

1.2.11.  $\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx.$

Відповідь:  $\frac{1}{6} (x^4 + 1)^{3/2} + C.$

1.2.12.  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx.$

Відповідь:  $\frac{1}{3} \ln^3 x + C.$

1.2.13.  $\int \operatorname{ctg} x dx.$

Відповідь:  $\ln |\sin x| + C.$

$$1.2.14. \int \frac{x^2}{x^6+9} dx.$$

Відповідь:  $\frac{1}{9} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{3} + C.$

$$1.2.15. \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} dx.$$

Відповідь:  $\ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}) + C.$

$$1.2.16. \int \sin^3 x dx.$$

Відповідь:  $-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C.$

1.3. Домашнє завдання.

Знайти інтеграли:

$$1.3.1. \int \left( \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x} \right) (x+1) dx.$$

Відповідь:  $\frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{3}{7} x^{7/3} + \frac{3}{4} x^{4/3} - x - \ln|x| + C.$

$$1.3.2. \int \frac{2x^2+1}{x^2-1} dx.$$

Відповідь:  $2x + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$

$$1.3.3. \int \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2^x} dx.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{2} \left(\frac{e}{2}\right)^x \frac{1}{1 - \ln 2} - \frac{1}{2} (2e)^{-x} \frac{1}{1 + \ln 2} + x + C.$$

$$1.3.4. \int \operatorname{cth}^2 x dx.$$

$$\text{Відповідь: } x - \operatorname{cth} x + C.$$

$$1.3.5. \int \operatorname{ch}^2 x dx.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C.$$

$$1.3.6. \int \sin^4 x dx.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

$$1.3.7. \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{3}{2}x\right) + C.$$



$$1.3.8. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

Відповідь:  $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$ .

$$1.3.9. \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

Відповідь:  $\sqrt{x^2-1} + C$ .

$$1.3.10. \int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx.$$

Відповідь:  $\frac{1}{4} \operatorname{arctg}^4 x + C$ .

$$1.3.11. \int \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx.$$

Відповідь:  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 5) + C$ .

$$1.3.12. \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$$

Відповідь:  $\frac{1}{\cos x} + C$ .

$$1.3.13. \int x^3 e^{-x^4} dx.$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{1}{4}e^{-x^4} + C.$$

$$1.3.14. \int \frac{dx}{\cos x}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C.$$

$$1.3.15. \int \frac{x(1+x^2)}{1+x^4} dx.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + C.$$

$$1.3.16. \int \frac{\operatorname{sh} 2x dx}{1+\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$\text{Відповідь: } \ln(1+\operatorname{ch}^2 x) + C.$$

## Заняття 2

Загальний метод заміни змінної. Інтегрування частинами

2.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками.

2.2. Завдання для роботи в аудиторії.

Знайти інтеграли за загальним методом заміни змінної:

2.2.1.  $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ .

Відповідь:  $\ln \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} + C$ .

2.2.2.  $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$ .

Відповідь:  $\sqrt{x^2-1} - \arctg \sqrt{x^2-1} + C$ .

2.2.3.  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x+1}}$ .

Відповідь:  $x - 2\sqrt{x} + 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C$ .

2.2.4.  $\int \cos^3 x \sqrt{\sin x} dx$ .

Відповідь:  $\frac{2}{3} \sqrt{\sin^3 t} - \frac{2}{7} \sqrt{\sin^7 t} + C$ .

$$2.2.5. \int x^5(2 - 5x^3)^{\frac{2}{3}} dx.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{25} \left[ \frac{1}{8}(2 - 5x^3)^{\frac{8}{3}} - \frac{2}{5}(2 - 5x^3)^{\frac{5}{3}} \right] + C.$$

$$2.2.6. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+2 \cos x}} dx.$$

$$\text{Відповідь: } \sqrt{1+2 \cos x} - \frac{1}{3} \sqrt{(1+2 \cos x)^3} + C.$$

Знайти інтеграли за методом інтегрування частинами:

$$2.2.7. \int x4^x dx.$$

$$\text{Відповідь: } x \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{4^x}{\ln^2 4} + C.$$

$$2.2.8. \int x^2 \sin^2 x dx.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C.$$

2.2.9.  $\int \ln^2 x dx.$

Відповідь:  $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C.$

2.2.10.  $\int x \operatorname{arctg} x dx.$

Відповідь:  $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$

2.2.11.  $\int x^n \ln x dx.$

Відповідь:  $\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$

2.2.12.  $\int e^{2x} \cos x dx.$

Відповідь:  $\frac{1}{5}(\sin x + 2 \cos x)e^{2x} + C.$

2.2.13.  $\int \sqrt{x^2 + 1} dx.$

Відповідь:  $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C.$

2.2.14.  $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx.$

Відповідь:  $-\frac{1}{x}\arcsin x - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right) + C.$

2.2.15.  $\int e^{\sqrt{x}} dx.$

Відповідь:  $2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C.$

2.2.16.  $\int \cos(\ln x) dx.$

Відповідь:  $\frac{1}{2}x(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C.$

2.3. Домашнє завдання.

Знайти інтеграли:

2.3.1.  $\int \frac{dx}{e^x+1}$ .

Відповідь:  $x - \ln(e^x + 1) + C$ .

2.3.2.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ .

Відповідь:  $\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} + C$ .

2.3.3.  $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$ .

Відповідь:  $-8(2-x)^{1/2} + \frac{8}{3}(2-x)^{3/2} - \frac{2}{5}(2-x)^{5/2} + C$ .

2.3.4.  $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx$ .

Відповідь:  $2\sqrt{1+\ln x} + \ln \left| \frac{\sqrt{\ln x+1}-1}{\sqrt{\ln x+1}+1} \right| + C$ .

$$2.3.5. \int x^2 \sqrt{1-x} dx.$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{3}{4}(1-x)^{4/3} + \frac{6}{7}(1-x)^{7/3} - \frac{3}{10}(1-x)^{10/3} + C.$$

$$2.3.6. \int \frac{\cos 4x - \sin 2x}{\sin 4x + 2 \cos 2x} dx.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{4} \ln |\sin 4x + 2 \cos 2x| + C.$$

$$2.3.7. \int x \cos x dx.$$

$$\text{Відповідь: } x \sin x + \cos x + C.$$

$$2.3.8. \int x^3 e^{-x} dx.$$

$$\text{Відповідь: } -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + C.$$

$$2.3.9. \int \ln(x^2 + 1) dx.$$



Відповідь:  $x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C$ .

2.3.10.  $\int \arccos x dx$ .

Відповідь:  $x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C$ .

2.3.11.  $\int x \operatorname{ctg}^2 x dx$ .

Відповідь:  $-x \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x| - \frac{x^2}{2} + C$ .

2.3.12.  $\int e^{-x} \sin^2 x dx$ .

Відповідь:  $-\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{10}e^{-x}(2 \sin 2x - \cos 2x) + C$ .

$$2.3.13. \int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx.$$

Відповідь:  $x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{x^2 + 1} + C.$

$$2.3.14. \int x^3 e^{x^2} dx.$$

Відповідь:  $\frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C.$

$$2.3.15. \int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$$

Відповідь:  $x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + C.$

$$2.3.16. \int (\arcsin x)^2 dx.$$

Відповідь:  $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1 - x^2} \arcsin x - 2x + C.$

### Заняття 3

#### Інтегрування дробово-раціональних функцій

3.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками.

3.2. Завдання для роботи в аудиторії.

3.2.1.  $\int \frac{2x+1}{x^3+2x^2-x-2} dx.$

Відповідь:  $-\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C.$

3.2.2.  $\int \frac{x^4+x^3-3x^2+4x+3}{x^2+x-2} dx.$

Відповідь:  $\frac{x^3}{3} - x + 2\ln|x-1| + 3\ln|x+2| + C.$

$$3.2.3. \int \frac{6x+2}{x^3+x^2-5x+3} dx.$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{2}{x-1} + \ln|x-1| - \ln|x+3| + C.$$

$$3.2.4. \int \frac{x^4+2x^3+2x^2+3x+1}{x^2(x+1)^2} dx.$$

$$\text{Відповідь: } x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C.$$

3.2.5.  $\int \frac{x^3+4x-4}{x^3-8} dx.$

Відповідь:  $x + \ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$

3.2.6.  $\int \frac{6x+5}{(x+3)^2(x^2+4)} dx.$

Відповідь:  $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{x+3} + C.$

$$3.2.7. \int \frac{x^4 + 3x^2 + x + 1}{x(x^2 + 1)^2} dx.$$

Відповідь:  $\ln|x| + \frac{1}{2} \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$

$$3.2.8. \int \frac{2x^2 + 4x + 4}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 3)^2} dx.$$

Відповідь:  $-\frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \frac{x+1}{x^2+2x+3} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + C.$

3.3. Домашнє завдання.

Знайти інтеграли:

3.3.1.  $\int \frac{x^4 - x^3 - 2x^2 + 10x - 4}{x^3 - 4x} dx.$

Відповідь:  $\frac{x^2}{2} - x + 2 \ln |x - 2| + \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + C.$

3.3.2.  $\int \frac{10 - 2x}{x^3 + 3x^2 - x - 3} dx.$

Відповідь:  $\ln |x - 1| - 3 \ln |x + 1| + 2 \ln |x + 3| + C.$

3.3.3.  $\int \frac{2x^3 + x^2 - x - 1}{x^3(x+1)} dx.$

Відповідь:  $\frac{1}{2x^2} + \ln|x^2 + x| + C.$

3.3.4.  $\int \frac{-x^3 + 2x^2 - 4x - 12}{x^3(x+1)} dx.$

Відповідь:  $\frac{6}{x^2} - \frac{8}{x} - 6\ln|x| + 5\ln|x+1| + C.$



$$3.3.5. \int \frac{3x^3 + 3x^2 + 5x - 1}{(x^2 - 1)(x^2 + x + 3)} dx.$$

Відповідь:  $\ln|x^2 - 1| + \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 3) + \frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}} + C.$

$$3.3.6. \int \frac{4x^2 - 13x + 10}{(x-3)^2(x^2 - 2x + 4)} dx.$$

Відповідь:  $-\frac{1}{x-3} + \ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x + 4) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$

$$\times 3.3.7. \int \frac{x^3 + 4x^2 + x + 3}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)^2} dx.$$

$$\text{Відповідь: } \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) - \frac{1}{2} \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2} + C.$$

$$3.3.8. \int \frac{16dx}{x^2(x^2+4)^2}.$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{1}{x} - \frac{3}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+4} + C.$$

## Заняття 4

### Інтегрування тригонометричних функцій

4.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками.

4.2. Завдання для роботи в аудиторії.

Знайти інтеграли:

4.2.1.  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx.$

Відповідь:  $\cos x + \frac{1}{\cos x}.$

4.2.2.  $\int \frac{dx}{\cos x}.$

Відповідь:  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C.$

4.2.3.  $\int \sin^3 x \cos^2 x dx.$

Відповідь:  $\frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C.$

$$4.2.4. \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx.$$

Відповідь:  $\cos x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} \right| + C.$

$$4.2.5. \int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

Відповідь:  $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.$

$$4.2.6. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx.$$

Відповідь:  $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C.$

$$4.2.7. \int \operatorname{ctg}^4 x dx.$$

Відповідь:  $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + x + C.$

$$4.2.8. \int \cos^6 x dx.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

$$4.2.9. \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$$

$$\text{Відповідь: } \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}} \right| + C.$$

$$4.2.10. \int \frac{dx}{3 + \sin x}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2\sqrt{2}} \right) + C.$$

$$4.2.11. \int \frac{2 - \cos x}{2 + \cos x} dx.$$

Відповідь:  $\frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right) - 2 \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$

$$4.2.12. \int \frac{\sin x dx}{2 \sin x - \cos x + 5}.$$

Відповідь:  $\frac{1}{5} \ln \left( \frac{6 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} \right) + \frac{2}{5} x - \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left( \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} \right) + C.$

4.3. Домашнє завдання.

Знайти інтеграли:

$$4.3.1. \int \frac{dx}{\cos x \sin^2 x}.$$

Відповідь:  $-\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x} + C.$

4.3.2.  $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$

Відповідь:  $-\cos x - \frac{3}{4} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} - \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} + C.$

4.3.3.  $\int \frac{dx}{\cos^3 x}.$

Відповідь:  $\frac{1}{4} \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} + \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + C.$

4.3.4.  $\int \sin^5 x \cos^5 x dx.$

Відповідь:  $-\frac{1}{64} \left( \cos 2x - \frac{2}{3} \cos^3 2x + \frac{1}{5} \cos^5 2x \right) + C.$

4.3.5.  $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}.$

Відповідь:  $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.$

4.3.6.  $\int \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{1 - \operatorname{ctg} x} dx.$

Відповідь:  $\ln |\operatorname{ctg} x - 1| - \frac{1}{2} \ln(\operatorname{ctg}^2 x + 1) + C.$



$$4.3.7. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$$

Відповідь:  $-8 \operatorname{ctg} 2x - \frac{8}{3} \operatorname{ctg}^3 2x + C.$

$$4.3.8. \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

Відповідь:  $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x + 1| + \frac{1}{4} \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) + C.$

$$4.3.9. \int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}.$$

Відповідь:  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$

$$4.3.10. \int \frac{dx}{5-4 \sin x+3 \cos x}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{2-\operatorname{tg} \frac{x}{2}}+C.$$

$$4.3.11. \int \frac{2-\sin x}{2+\cos x} dx.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + \ln \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}+3}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}+1} + C.$$

$$4.3.12. \int \frac{\cos x dx}{1+\sin x+\cos x}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{x}{2}-\frac{1}{2} \ln \left(1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) + C.$$

## Заняття 5

### Інтегрування ірраціональних функцій

5.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками.

5.2. Завдання для роботи в аудиторії.

Знайти інтеграли:

5.2.1.  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x-3}\sqrt{x}}.$

Відповідь:  $x + \frac{6}{5}x^{5/6} + \frac{3}{2}x^{2/3} + 2x^{1/2} + 3x^{1/3} + 6x^{1/6} + \ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C.$

5.2.2.  $\int \frac{\sqrt[6]{x+1}-1}{(x+1)(\sqrt[3]{x+1}+1)} dx.$

Відповідь:  $6 \arctg \sqrt[6]{x+1} - \ln(x+1) + 3 \ln(\sqrt[3]{x+1} + 1) + C.$

5.2.3.  $\int \frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx.$

Відповідь:  $\frac{1}{2} \arcsin x - \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$

5.2.4.  $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{(x-1)^3}$ .

Відповідь:  $-\frac{3}{28} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{7/3} + \frac{3}{16} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{4/3} + C$ .

5.2.5.  $\int x^3 \sqrt{4-x^2} dx$ .

Відповідь:  $2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{4} (x^2 - 2) \sqrt{4-x^2} + C$ .

5.2.6.  $\int \sqrt{(x^2-1)^3} dx$ .

Відповідь:  $\frac{3}{8} \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{8} x(2x^2-1) \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} x \sqrt{x^2-1} + C$ .

$$5.2.7. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}.$$

Відповідь:  $\ln \left| \frac{\sqrt{x^2+8x+1}-x-1}{\sqrt{x^2+8x+1}-x+1} \right| + C.$

$$5.2.8. \int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}.$$

+ C. Відповідь:  $\frac{1}{\sqrt{15}} \ln \frac{\sqrt{12-3x}-\sqrt{5x}}{\sqrt{12-3x}+\sqrt{5x}} + C.$

5.2.9.  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x} dx.$

Відповідь:  $6t + 2 \ln \left| \frac{t-1}{\sqrt{t^2+t+1}} \right| - 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$ , де  $t = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$ .

5.2.10.  $\int \frac{dx}{x^{11} \sqrt{1+x^4}}.$

Відповідь:  $-\frac{1}{10} \left( \frac{1+x^4}{x^4} \right)^{5/2} + \frac{1}{3} \left( \frac{1+x^4}{x^4} \right)^{3/2} - \frac{1}{2} \left( \frac{1+x^4}{x^4} \right)^{1/2} + C.$

5.3. Д

Знай

5.3.1.

Відп

$\frac{5}{8} \ln(3)$

5.3.2

Відп

$-\sqrt{x}$

5.3. Домашнє завдання.

Знайти інтеграли:

5.3.1.  $\int \frac{x \sqrt[3]{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}} dx.$  ✓

Відповідь:  $\frac{3}{4}(2+x)^{4/3} - \frac{3}{2}(2+x)^{2/3} - \frac{3}{4} \ln |\sqrt[3]{2+x} - 1| +$   
 $\frac{15}{8} \ln(\sqrt[3]{(2+x)^2} + \sqrt[3]{2+x} + 2) - \frac{27}{4\sqrt{7}} \arctg \frac{2\sqrt[3]{2+x} + 1}{\sqrt{7}} + C.$

5.3.2.  $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx.$  ✗

Відповідь:  $-\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t + 3 \ln(t^2 + 1) - 6 \arctg t + C,$  де  
 $= \sqrt[6]{x+1}.$

$$5.3.3. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}.$$

$$\text{Відповідь: } \ln \left| \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

$$5.3.4. \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} \right| - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} + \frac{x-1}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})^2} + C.$$



$$5.3.5. \int \sqrt{4x - x^2} dx.$$

Відповідь:  $\frac{x-2}{2} \sqrt{4x - x^2} + 2 \arcsin \frac{x-2}{2} + C.$

$$5.3.6. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

Відповідь:  $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$

$$5.3.7. \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

$$\sqrt{x^2+1} + C.$$

Відповідь:  $2 \ln |\sqrt{x^2 - x + 1} - x| - \frac{3}{2} \ln |1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 2x| +$   
 $+\frac{3}{2(1+\sqrt{x^2-x+1}-2x)} + C.$

5.3.8.  $\int \sqrt{x^2 - 2x - 1} dx.$

Відповідь:  $\frac{1}{2}(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \ln |x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x - 1}| + C.$

$$5.3.9. \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}.$$

Відповідь:  $\frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{4}\ln|t^2+t+1| + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$ , де  $t = \sqrt[3]{x^2+1}$ .

$$5.3.10. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

Відповідь:  $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C.$

## Заняття 6

### Визначений інтеграл. Обчислення площі плоскої фігури

6.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками.

6.2. Завдання для роботи в аудиторії.

Знайти інтеграли:

$$6.2.1. \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$$

Відповідь: 2.

$$6.2.2. \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}} dx.$$

Відповідь:  $\ln \frac{e+\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}$ .

$$6.2.3. \int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx.$$

Відповідь:  $\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \ln 2$ .

$$6.2.4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx.$$

Відповідь:  $\frac{1}{5}(e^{\pi} - 2)$ .

$$6.2.5. \int_1^2 \frac{2dx}{x^3 + x^2 + 2x}.$$

Відповідь:  $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{11}$ .

$$6.2.6. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \frac{1}{6} \sin^2 x}.$$

Відповідь:  $\sqrt{\frac{6}{7}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{7}{6}}$ .

6.2.7.  $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{(x^2+3)^5}}$ .

Відповідь:  $\frac{\sqrt{3}}{24}$ .

Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

6.2.8.  $y = x^2$ ;  $y = \sqrt{x}$ .

Відповідь:  $\frac{1}{3}$ .

6.2.9.  $y^2 = 2x + 1; x - y - 1 = 0$ .

Відповідь:  $\frac{16}{3}$ .

6.2.10.  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \quad (x \geq \sqrt{2})$ .

Відповідь:  $2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln 3$ .

$$6.2.11. \begin{cases} y = \sin^3 t, \\ x = \cos^3 t. \end{cases}$$

Відповідь:  $\frac{3\pi}{8}$ .

$$6.2.12. \begin{cases} y = 3t - t^3, \\ x = 3t^2. \end{cases}$$

Відповідь:  $\frac{72\sqrt{3}}{5}$ .



$$6.2.13. \begin{cases} y = 2 \sin t, \\ x = 3 \cos t. \end{cases}$$

Відповідь:  $6\pi$ .

$$6.2.14. \rho = \sin 5\varphi.$$

Відповідь:  $\frac{\pi}{4}$ .

$$6.2.15. \rho = 1 + \sin \varphi.$$

Відповідь:  $\frac{3\pi}{4}$ .

6.2.16.  $\rho = 2 - \cos 4\varphi$  ( $\rho \leq 3 + \cos 4\varphi$ ).

Відповідь:  $\frac{37\pi}{6} - 5\sqrt{3}$ .

6.3. Домашнє завдання.

Знайти інтеграли:

$$6.3.1. \int_0^2 \operatorname{ch}^3 x dx.$$

Відповідь:  $\operatorname{sh} 2 + \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 2$ .

$$6.3.2. \int_0^1 \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Відповідь:  $\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{2}+1}$ .

$$6.3.3. \int_1^e \ln^3 x dx.$$

Відповідь:  $6 - 2e$ .

$$6.3.4. \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} \arccos x dx.$$

Відповідь:  $\frac{5\pi^2}{144} + \frac{\pi\sqrt{3}}{24} + \frac{1}{16}$ .

$$6.3.5. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$$

Відповідь:  $\frac{\pi}{6}$ .

$$6.3.6. \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Відповідь:  $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ .

$$6.3.7. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2 \cos x}.$$

Відповідь:  $\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Обчислити площі фігур, обмежених кривими:

$$6.3.8. y = \frac{1}{1+x^2}; y = \frac{x^2}{2}.$$

Відповідь:  $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ .

6.3.9.  $y^2 + 8x = 16$ ;  $y^2 + 16x = 16$ .

Відповідь:  $\frac{16}{3}$ .

6.3.10.  $y = \ln x$ ;  $y = \ln^2 x$ .

Відповідь:  $3 - e$ .

$$6.3.11. \begin{cases} y = (1 - \cos t), \\ x = t - \sin t; \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]; \quad y = 0.$$

Відповідь:  $3\pi$ .

$$6.3.12. \begin{cases} y = t^3 - t, \\ x = t^2 - 1. \end{cases}$$

Відповідь:  $\frac{8}{15}$ .

$$6.3.13. \rho = 2 + \cos \varphi.$$

Відповідь:  $\frac{9}{2}\pi$ .  
6.3.14.  $\rho = \sin \varphi + \cos \varphi$ .

Відповідь:  $\frac{\pi}{2}$ .  
6.3.15.  $\rho = \operatorname{tg} \varphi$ ;  $\rho = \frac{1}{2 \cos \varphi}$ ;  $\varphi = 0$ .

Відповідь:  $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{24}$ .



## Заняття 7

### Обчислення довжин дуг кривих, об'ємів і площі поверхонь тіл обертання

7.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками.

7.2. Завдання для роботи в аудиторії.

Знайти довжини дуг кривих:

7.2.1.  $y = \ln x, x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$ .

Відповідь:  $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$ .

7.2.2.  $5y^3 = x^2, x^2 + y^2 \leq 6$ .

Відповідь:  $\frac{134}{27}$ .

$$7.2.3. \begin{cases} y = 1 - \cos t, \\ x = t - \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

Відповідь: 8.

$$7.2.4. \begin{cases} y = t\left(1 - \frac{t^2}{3}\right), \\ x = t^2. \end{cases}$$

Відповідь:  $4\sqrt{3}$ .

7.2.5.  $\rho = 3\varphi, \varphi \in [0; 2\pi]$ .

Відповідь:  $3\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{3}{2}\ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1})$ .

7.2.6.  $\rho = \cos^3 \frac{\varphi}{3}$ .

Відповідь:  $\frac{3}{2}\pi$ .

Знайти площі поверхонь обертання кривих навколо осі  $OX$ :

7.2.7.  $y = \frac{x^3}{3}, x \in [-1, 1]$ .

Відповідь:  $\frac{2\pi}{9}(2\sqrt{2} - 1)$ .

$$7.2.8. \begin{cases} y = 1 - \cos t, \\ x = t - \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

Відповідь:  $\frac{64}{3}\pi$ .

$$7.2.9. \rho = 2 \sin \varphi.$$

Відповідь:  $4\pi^2$ .

Знайти об'єми тіл обертання кривих навколо осі  $OX$ :

7.2.10.  $y = \arcsin x$ ,  $x \in [0, 1]$ .

Відповідь:  $\pi \left( \frac{\pi^2}{4} - 2 \right)$ .

7.2.11.  $\begin{cases} y = \sin^3 t, \\ x = \cos^3 t. \end{cases}$

Відповідь:  $\frac{32}{105}\pi$ .

7.2.12.  $\rho = \sin \varphi$ .

Відповідь:  $\frac{\pi^2}{4}$ .

7.3. Домашнє завдання.

Знайти довжини дуг кривих:

7.3.1.  $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ ,  $x \in [0, 3]$ .

Відповідь:  $2\sqrt{3}$ .

7.3.2.  $y^2 = 2x, x \in [0, 1]$ .

Відповідь:  $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ .

7.3.3.  $\begin{cases} y = 3 \sin t - \sin 3t, \\ x = 3 \cos t - \cos 3t, \end{cases} t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Відповідь: 6.

7.3.4.  $\begin{cases} y = \sin^3 t, \\ x = \cos^3 t. \end{cases}$

Відповідь: 6.

7.3.5.  $\rho = e^\varphi$ ,  $\rho \in [1; e]$ .

Відповідь:  $\sqrt{2}(e - 1)$ .

7.3.6.  $\rho = 1 + \cos \varphi$ .

Відповідь: 8.



Знайти площі поверхонь обертання кривих навколо осі  $OX$ :

7.3.7.  $y = \operatorname{ch} x, x \in [0, \ln 2]$ .

Відповідь:  $\frac{15}{16}\pi + \pi \ln 2$ .

7.3.8.  $\begin{cases} y = \frac{t}{3}(3 - t^2), \\ x = t^2 + 1, \end{cases} t \in [0; \sqrt{3}]$ .

Відповідь:  $3\pi$ .

7.3.9.  $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$ .

Відповідь:  $2\pi(2 - \sqrt{2})$ .

Знайти об'єми тіл обертання кривих навколо осі  $OX$ :

7.3.10.  $y = \frac{1}{1+x^2}, x \in [0; 1]$ .

Відповідь:  $\pi\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right)$ .

7.3.11.  $\begin{cases} y = \sin 2t, \\ x = \sin t. \end{cases}$

Відповідь:  $\frac{16}{15}\pi$ .

7.3.12.  $\rho = 1 + \cos \varphi$ .

Відповідь:  $\frac{8}{3}\pi$ .

## Заняття 8

### Застосування визначеного інтеграла до задач механіки та фізики

8.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками.

8.2. Завдання для роботи в аудиторії.

8.2.1. Знайти статичний момент дуги еліпса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x, y \geq 0, a > b > 0$  відносно осі  $OX$ .

Відповідь: 
$$\frac{1}{2} \left( b^2 + \frac{ab}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \arcsin \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right).$$

8.2.2. Знайти координати центра ваги півкола  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ .

іки

$\geq 0, a > b,$

Відповідь:  $\left(0; \frac{2R}{\pi}\right)$ .

8.2.3. Знайти координати центра ваги першої арки циклоїди  $y = 1 - \cos t,$   
 $x = t - \sin t.$

Відповідь:  $\left(\pi; \frac{4}{3}\right)$ .

8.2.4. Знайти статичний момент фігури, яка обмежена кривими  $y = \frac{2}{1+x^2}$ ,  $y = x^2$ ,  $x = 0$ ,  $x \geq 0$ , відносно осей координат.

Відповідь:  $M_x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{5}$ ;  $M_y = \ln 2 - \frac{1}{4}$ .

8.2.5. Знайти координати центра ваги чверті еліпса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

$$y = \frac{2}{1+x^2},$$

Відповідь:  $\left(\frac{4a}{3\pi}; \frac{4b}{3\pi}\right)$ .

8.2.6. Знайти момент інерції півкола  $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$ , навколо осі  $OX$ .

$$\leq 1, x \geq 0,$$

Відповідь:  $\frac{\pi}{8}$ .

8.2.7. Вважаючи, що сила взаємодії двох точкових мас  $m$  і  $M$  обчислюється за формулою  $k \frac{mM}{r^2}$ , де  $r$  – відстань між точками,  $k$  – коефіцієнт пропорційності, знайти силу взаємодії плоского диска  $x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0$  масою  $M$  з матеріальною точкою  $(0, 0, a)$  масою  $m$ .

Відповідь:  $2 \frac{kmM}{R^2} \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right)$ .

8.2.8. Обчислити роботу, яку необхідно виконати, щоб викачати воду півсферичного резервуара радіусом  $R$ .



Відповідь:  $\frac{1}{4}\pi g \gamma R^4$ , де  $\gamma$  – густина води.

8.2.9. Обчислити силу тиску води на бокову поверхню колового циліндра радіусом  $R$  і висотою  $h$ . Густина води  $\gamma$ . Вода повністю заповнює циліндр.

ати воду з

Відповідь:  $\pi \gamma g R h^2$ .

8.2.10. Обчислити кінетичну енергію кулі масою  $m$  та радіусом  $R$ , яка обертається зі швидкістю  $\omega$  навколо осі, що проходить через її центр.

Відповідь:  $\frac{1}{5}m\omega^2 R^2$ .

8.3. Домашнє завдання.

8.3.1. Знайти статичний момент дуги  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $x \in [0, 1]$ , відносно осей координат.

Відповідь:  $M_x = \frac{3}{16}\sqrt{2} - \frac{1}{16}\ln(1 + \sqrt{2})$ ;  $M_y = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ .

8.3.2. Знайти координати центра ваги дуги астроїди  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$ ,  
 $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Відповідь:  $\left(\frac{2}{5}; \frac{2}{5}\right)$ .

8.3.3. Знайти статичні моменти фігури, обмеженої кривими  $y = x^2$ ,  
 $y = \sqrt{x}$ , відносно осей координат.

Відносно осей

Відповідь:  $M_x = \frac{3}{20}$ ;  $M_y = \frac{1}{15}$ .

8.3.4. Знайти координати центра ваги фігури, обмеженої першою аркою  
циклоїди  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$  і віссю  $OX$ .

Відповідь:  $\left(\pi; \frac{5}{6}\right)$ .

8.3.5. Знайти момент інерції конуса, радіус основи якого дорівнює  $R$ , висота –  $H$ , відносно його осі.

Відповідь:  $\frac{\pi}{10}HR^4$ .

8.3.6. Вважаючи, що сила взаємодії двох електричних зарядів обчислюється за формулою  $k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ , де  $q_1, q_2$  – величини зарядів,  $r$  – відстань між ними,  $k$  – коефіцієнт пропорційності, знайти силу, з якою рівномірно заряджений відрізок  $y = 0, x \in [-a, a]$  (лінійна щільність заряду  $\sigma$ ) діє на одиничний заряд, розташований у точці  $(0, b)$ .

Відповідь:  $\frac{2k\sigma a}{b\sqrt{a^2+b^2}}$ .

8.3.7. Обчислити роботу, яку треба витратити, щоб тіло масою  $m$  підняти з поверхні Землі (радіус  $R$ ) на висоту  $h$ .

Відповідь:  $mg\frac{Rh}{R+h}$ .

8.3.8. Швидкість витікання рідини через малий отвір визначається за формулою  $V = \sqrt{2gh}$ , де  $h$  – висота стовпа рідини. За який час рідина витече з циліндричної посудини радіусом  $R$  і висотою  $H$  з малим коловим отвором радіусом  $r$ ?

Відповідь:  $\frac{R^2}{r^2}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ .

## Заняття 9

### Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування

9.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками.

9.2. Завдання для роботи в аудиторії.

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

9.2.1. 
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3+x^2}.$$

Відповідь:  $1 - \ln 2$ .

9.2.2. 
$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$$

Відповідь: інтеграл розбіжний.

9.2.3. 
$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx.$$

Відповідь:  $\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2}$ .

$$9.2.4. \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

Відповідь:  $\ln(\sqrt{2} - 1)$ .

$$9.2.5. \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$$

Відповідь:  $\frac{1}{2}$ .

$$9.2.6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)dx}{(x^2+1)^2}.$$

Відповідь:  $\frac{\pi}{2}$ .

$$9.2.7. \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx.$$

Відповідь:  $n!$ .

Дослідити збіжність інтегралів:

$$9.2.8. \int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx.$$

Відповідь: інтеграл розбіжний.

$$9.2.9. \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

Відповідь: інтеграл збіжний.

$$9.2.10. \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx.$$



Відповідь: інтеграл розбіжний.

9.2.11.  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$

Відповідь: інтеграл збіжний.

9.2.12. При яких  $\alpha$  інтеграл  $\int_1^{\infty} x^{\alpha} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} dx$  збіжний?

Відповідь:  $\alpha < -1.$

9.3. Домашнє завдання.

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

9.3.1.  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$

Відповідь:  $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ .

9.3.2.  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$ .

Відповідь:  $\sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1)$ .

9.3.3.  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx$  ( $a > 0$ ).

Відповідь:  $\frac{a}{a^2+b^2}$ .

9.3.4.  $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ .

Відповідь: 2.

$$9.3.5. \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx.$$

Відповідь:  $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ .

Дослідити збіжність інтегралів:

$$9.3.6. \int_1^{\infty} \sqrt{x} \arcsin \frac{1}{x^2} dx.$$

Відповідь: інтеграл збіжний.

$$9.3.7. \int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x}.$$

Відповідь: інтеграл розбіжний.

$$9.3.8. \text{Обчислити інтеграл } \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, n \in N.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 1}{(2n-2)(2n-4)\dots 2} \cdot \frac{1}{a^{2n-1}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

## Заняття 10

### Невласні інтеграли від необмежених функцій

10.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками.

10.2. Завдання для роботи в аудиторії.

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$10.2.1. \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}.$$

Відповідь:  $\frac{8}{3}$ .

$$10.2.2. \int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

Відповідь: 1.

$$10.2.3. \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a < b).$$

Відповідь:  $\pi$ .

$$10.2.4. \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx.$$

Відповідь:  $\frac{10}{7}$ .

$$10.2.5. \int_0^1 (\ln x)^n dx.$$

Відповідь:  $(-1)^n n!$ .

Дослідити збіжність інтегралів:

$$10.2.6. \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Відповідь: інтеграл збіжний.

$$10.2.7. \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1}.$$

Відповідь: інтеграл збіжний.

$$10.2.8. \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}.$$

Відповідь: інтеграл розбіжний.

10.3. Домашнє завдання.

Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$10.3.1. \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}.$$

Відповідь: інтеграл розбіжний.

$$10.3.2. \int_0^1 x \ln x dx.$$

Відповідь:  $-\frac{1}{4}$ .

$$10.3.3. \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

Відповідь: 2.

$$10.3.4. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

Відповідь:  $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ .

$$10.3.5. \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} dx, n \in N.$$

Відповідь:  $2 \cdot \frac{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3 \cdot 1}$ .



Дослідити збіжність інтегралів:

$$10.3.6. \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}.$$

Відповідь: інтеграл збіжний.

$$10.3.7. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

Відповідь: інтеграл збіжний.

$$10.3.8. \int_0^1 x^{-3} e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} dx.$$

Відповідь: інтеграл збіжний.

## Заняття 11

### Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними і однорідні рівняння

11.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками.

11.2. Завдання для роботи в аудиторії.

11.2.1. Побудувати ізокліни та поле напрямків диференціального рівняння  $xy' = 2y$ .

11.2.2. Розв'язати диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними:

ми:

а)  $x(1 + y^2)dx = y(1 + x^2)dy$ ;

в)  $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$ ;

б)  $y' = x \operatorname{tg} y$ ;

г)  $x^2y' - 1 = \cos 2y$ .

Відповідь: а)  $1 + y^2 = C(1 + x^2)$ ; б)  $\sin y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$ ; в)  $xC = y + \sqrt{1 + y^2}$ ;  
г)  $\operatorname{tg} y = C - \frac{2}{x}$ .

11.2.3. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь, що задовольняють указані початкові умови:

а)  $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$ ,  $y(0) = 0$ ; б)  $y' \sin x = \sin y$ ,  $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$ .

Відповідь: а)  $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = 2$ ; б)  $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

11.2.4. Розв'язати однорідні диференціальні рівняння:

а)  $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ ;

б)  $xdy = (x + y)dx$ .

Відповідь: а)  $y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 C$ ; б)  $y = x(\ln |x| + C)$ ,  $x = 0$ .

11.2.5. Розв'язати задачу Коші для рівняння  $(x - 2\sqrt{xy})dy = ydx$ ,  
 $y(1) = 1$ .

Вказівка: як нову функцію взяти  $\frac{x}{y}$ .

Відповідь:  $\sqrt{\frac{x}{y}} - \ln |y| = 1$ .

11.2.6. Розв'язати рівняння, застосовуючи заміну  $x = u + \alpha$ ,  $y = v + \beta$   
 $y' = \frac{x-2y+5}{y-2x-4}$ .

Відповідь:  $(x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)$ .

11.3. Домашнє завдання.

11.3.1. Побудувати ізокліни та поле напрямків диференціального рівняння, наближено побудувати інтегральні криві для рівняння  $y' = 2x(1 - y)$ .

11.3.2. Розв'язати рівняння:

а)  $\operatorname{tg} x \sin^2 y dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y dy = 0$ ;

в)  $xyy' = 1 - x^2$ ;

б)  $y' \operatorname{tg} x = y$ ;

г)  $3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$ .

Відповідь: а)  $\operatorname{ctg}^2 y = \operatorname{tg}^2 x + C$ ; б)  $y = C \sin x$ ; в)  $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$ ;  
г)  $\operatorname{tg} y = C(1 - e^x)^3$ ;  $x = 0$ .

11.3.3. Знайти частинні розв'язки:

а)  $(1 + e^x)yy' = e^x$ ,  $y(0) = 1$ ;    б)  $y' \sin x = y \ln y$ ,  $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ .

Відповідь: а)  $2e^{\frac{1}{2}y^2} = \sqrt{e}(1+e^x)$ ; б)  $y = 1$ .

11.3.4. Розв'язати однорідні диференціальні рівняння:

а)  $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$ ;

б)  $(x - y)ydx - x^2 dy = 0$ .

Відповідь: а)  $\ln |x| + \sin \frac{y}{x} = C$ ;    б)  $x = Ce^{\frac{x}{y}}$ .

11.3.5. Розв'язати задачу Коші для диференціальних рівнянь з початковими умовами:

а)  $y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$ ,  $y(2) = 1$ ;

б)  $x^2y' = y^2 + 4xy + 2x^2$ ,  $y(1) = 1$ .

Відповідь: а)  $y = \sqrt{1 - \frac{3}{8}x}$ ; б)  $\frac{y+x}{y+2x} = \frac{2}{3}x$ .

11.3.6. Розв'язати рівняння  $y' = \frac{2x-y+1}{x-2y+1}$ .

Відповідь:  $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$ .

11.4. Приклади для додаткової роботи.

11.4.1. Визначити тип рівнянь і розв'язати їх:

а)  $y' = 10^{x+y}$ ;

б)  $y' = (x + y)^2$ ;

в)  $y' = \frac{y}{x} - 1$ ;

г)  $y' = \frac{1-3x-3y}{1+x+y}$ .

Відповідь: а)  $10^{x+y} + C10^y = -1$ ; б)  $x + y = \operatorname{tg}(x + C)$ ; в)  $y = x \ln \frac{C}{x}$   
г)  $2x + y + 2 \ln |x + y - 1| = C$ .



Bernull rule

## Заняття 12

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

### Рівняння Бернуллі

12.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками.

12.2. Завдання для роботи в аудиторії.

12.2.1. Розв'язати рівняння:

а)  $y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4$ ; б)  $xy' - 2y = 2x^4$ ; в)  $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ .

Відповідь: а)  $y = Ce^{x^2} + x^3$ ; б)  $y = Cx^2 + x^4$ ; в)  $y = C \sin x + \cos x$ .

12.2.2. Знайти частинні розв'язки рівнянь:

а)  $y' + y \cos x = \sin x \cos x$ ,  $y(0) = 1$ ;

б)  $y' = 2y + e^x - x$ ,  $y(0) = \frac{1}{4}$ .

Відповідь: а)  $y = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1$ ; б)  $y = e^{2x} - e^x + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ .

12.2.3. Розв'язати рівняння  $y'(3x - y^2) = y$ .

Вказівка: рівняння лінійне відносно змінної  $x$ .

Відповідь:  $x = y^2 + Cy^3$ .

12.2.4. Розв'язати рівняння Бернуллі:

а)  $xy' + y = 2y^2 \ln x$ ;

б)  $3y^2y' = 2y^3 + x + 1$ .

Відповідь: а)  $y = \frac{x}{Cx^2 + 2(\ln x + 1)}$ ; б)  $4y^3 = Ce^{2x} - 2x - 3$ .

12.2.5. Знайти частинний розв'язок рівняння  $y' + \frac{y}{x} = y^4(1 - x^2)$ ,  $y(1) = 1$ .

Відповідь:  $\frac{1}{y} = x^3 \ln x^3 + \frac{3}{4x} + \frac{x^3}{4}$ .

12.3. Домашнє завдання.

12.3.1. Розв'язати рівняння:

а)  $xy' - xy = e^x$ ;

б)  $y' + \frac{2y}{x} = x^3$ ;

в)  $xy' = y + x^2$ .

Відповідь: а)  $y = e^x(C + \ln|x|)$ ; б)  $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{x^2}$ ; в)  $y = Cx + \frac{1}{2}x^3$ .

12.3.2. Знайти частинні розв'язки рівнянь:

а)  $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ; б)  $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

Відповідь: а)  $y = x\left(\frac{2}{\pi} - \cos x\right)$ ; б)  $y = \sin x\left(x^2 - \frac{4}{\pi^2}\right)$ .

12.3.3. Розв'язати рівняння  $y^2 dx = (2xy + 3)dy$ .

Вказівка: рівняння лінійне відносно  $x$ .

Відповідь:  $x = Cy^2 - \frac{1}{y}$ .

12.3.4. Розв'язати рівняння Бернуллі:

а)  $y' - \frac{2y}{x} = x^2 \sqrt{y}$ ; б)  $y' + y \operatorname{ctg} x = y^2 \cos x$ .

Відповідь: а)  $y = \left(Cx + \frac{x^3}{4}\right)^2$ ; б)  $\frac{1}{y} = C \sin x - \sin x \ln |\sin x|$ .

12.3.5. Розв'язати задачу Коші для рівняння  $x^2 dx = (x^3 + y) dy$ ,  $y(0) =$

Відповідь:  $3x^3 = -ye^{3y}$ .

12.4. Завдання для самостійної роботи:

а)  $xy' - \frac{y}{x+1} = x$ ; б)  $y' - \frac{y}{x-1} = e^x(x-1)$ ,  $y(0) = 0$ ;

в)  $y' + 2xy = 2x^3y^3$ .

Відповідь: а)  $y = \frac{x^2 + x \ln|x| + Cx}{x+1}$ ; б)  $y = xe^x$ ; в)  $\frac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} - \frac{2x^2+1}{4}$ .

) = 0.

### Заняття 13

Диференціальні рівняння у повних диференціалах.  
Диференціальні рівняння, не розв'язані відносно похідної.

Особливі точки і особливі розв'язки

13.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками.

13.2. Завдання для роботи в аудиторії.

13.2.1. Розв'язати рівняння: а)  $\frac{xdy}{x^2+y^2} = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx$ ;

б)  $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y}\right)dy = 0$ .

Відповідь: а)  $x + \arctg\frac{y}{x} = C$ ; б)  $\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C$ .

13.2.2. Знайти частинні розв'язки рівнянь:

а)  $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^2 - x^2y)dy = 0$ ,  $y(1) = 1$ ;

б)  $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$ ,  $y(1) = 0$ .

Відповідь: а)  $x^4 - x^2y^2 + y^4 = 1$ ; б)  $xe^y - y^2 = 1$ .

13.2.3. Відшукати інтегральний множник рівняння та проінтегрувати рівняння  $(x^2 + y)dx - xdy = 0$ .

Вказівка: інтегральний множник має вигляд  $x^\alpha$ .

Відповідь:  $x - \frac{y}{x} = C$ .

13.2.4. Знайти загальний та особливий розв'язки рівнянь Клеро:

а)  $y = xy' - y'^2$ ;    б)  $y - xy' + e^{y'} = 0$ ;

в)  $xy' - y = \ln y'$ ;    г)  $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$ .

Відповідь: а)  $y = Cy' - C^2$ ,  $4y' = x^2$ ; б)  $y = Cx - e^C$ ,  $y = x(\ln x - 1)$ ;  
в)  $y = Cx - \ln C$ ,  $y = \ln x + 1$ ; г)  $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ .



грувати

13.2.5. Розв'язати рівняння Лагранжа  $y = x(y')^2 - 2(y')^3$ .

Вказівка: вводячи параметр, одержимо рівняння, лінійне відносно  $x$ .

Відповідь:  $x = C(p - 1)^{-2} + 2p + 1$ ,  $y = Cp^2(p - 1)^{-2} + p^2$ ,  $y = 0$ ,  $y = x - 2$ .

13.2.6. Дослідити характер особливих точок рівнянь:

а)  $y' = -\frac{x}{y}$ ; б)  $y' = \frac{y+1}{x+1}$ ; в)  $y' = \frac{x+y}{x-y}$ .

Вказівка: інтегральні криві рівняння "в" дослідити в полярній системі координат.

$\ln x - 1$ );

Відповідь: а)  $x^2 + y^2 = C$ ,  $M(0; 0)$  - центр; б)  $y + 1 = C(x + 1)$ ,  $M(-1; -1)$  - вузол; в)  $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\arctg \frac{y}{x}}$ ,  $M(0; 0)$  - фокус.

13.3. Домашнє завдання.

13.3.1. Розв'язати диференціальні рівняння у повних диференціалах:

а)  $\frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$ ; б)  $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0$ .

Відповідь: а)  $x^2 - y^2 = Cy^3$ ; б)  $x^y = C$ .

13.3.2. Знайти частинні розв'язки рівнянь:

а)  $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{ydx - xdy}{x^2}$ ,  $y\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$ ; б)  $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy =$   
 $y(0) = 1$ .

Відповідь: а)  $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = \frac{7}{4}$ ; б)  $x + ye^{\frac{x}{y}} = 1$ .

13.3.3. Знайти загальні та особливі розв'язки рівнянь Клеро:

а)  $y = xy' + \sin y'$ ; б)  $y = xy' - 3(y')^3$ ; в)  $y = xy' + \frac{1}{y'}$ .

Відповідь: а)  $y = xC + \sin C$ ,  $y = x(\pi - \arccos x) + \sqrt{1 - x^2}$ ; б)  $y = xC - 3C^3$ ,  
 $9y \pm 2x\sqrt{x} = 0$ ; в)  $y = Cx + \frac{1}{C}$ ,  $y^2 = 4x$ .

13.3.4. Розв'язати рівняння Лагранжа  $y = x(1 + y') + y'^2$ .

Відповідь:  $x = Ce^{-p} + 2(1 - p)$ ;  $y = x(1 + p) + p^2$ .

13.3.5. Дослідити характер особливих точок рівнянь:

а)  $y' = \frac{x+y}{x}$ ; б)  $y' = \frac{2y}{x}$ ; в)  $y' = -\frac{y}{x}$ .

Відповідь: а)  $y = x(\ln|x| + C)$ ,  $M(0, 0)$  – вироджений вузол; б)  $y = Cx$ ,  $M(0, 0)$  – вузол; в)  $y = \frac{C}{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $M(0, 0)$  – сідло.

13.4. Завдання для самостійної роботи.

13.4.1. Розв'язати рівняння за методом попереднього диференціювання вводячи параметр  $y' = p$ :

а)  $y = y'^2 + 2y'^3$ ; б)  $y = (y' - 1)e^{y'}$ .

Відповідь: а)  $x = 3p^2 + 2p + C$ ,  $y = 2p^3 + p^2$  та  $y = 0$ ; б)  $x = e^{y'}$ ,  $y = (p - 1)e^p$  та  $y = -1$ .

## Заняття 14

### Рівняння, які допускають зниження порядку

14.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками.

14.2. Завдання для роботи в аудиторії.

14.2.1. Розв'язати рівняння:

а)  $y''' = \sin x$ ;   б)  $y'' = xe^x$ .

Відповідь: а)  $y = \cos x + C_1x^2 + C_2x + C_3$ ;   б)  $y = xe^x - 2e^x + C_1x + C_2$ .

14.2.2. Розв'язати рівняння, які не містять шуканої функції:

а)  $2xy'y'' = (y')^2 + 1$ ;   б)  $y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}$ ;

в)  $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$ ;   г)  $y'' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x$ .

Відповідь: а)  $y = \frac{2}{3C_1} \sqrt{(C_1x - 1)^3 + C_2}$ ; б)  $x + C_2 = \frac{4}{3}(\sqrt{y} - 2C_1)\sqrt{\sqrt{y} + C_1}$

в)  $y = (C_1x + C_2)e^{\frac{x}{C_1} + 1} + C_2$ ; г)  $y = -\frac{1}{3}\sin^3 x + C_1(2x - \sin 2x) + C_2$ .

14.2.3. Розв'язати рівняння, які явно не містять незалежної змінної:

а)  $yy'' = (y')^2$ ; б)  $yy'' - (y')^2 = y^2y'$ ; в)  $yy'' - yy' \ln y = (y')^2$ .

Відповідь: а)  $y = C_1 e^{C_2 x}$ ; б)  $C_1 + C_2 x = \ln \left| \frac{y}{y + C_1} \right|$ ;

в)  $x + C_2 = 2C_1 \operatorname{arctg}(C_1 \ln y)$  ( $C_1 > 0$ ).

14.2.4. Знайти частинні розв'язки рівнянь:

а)  $y''(x^2 + 1) = 2xy'$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$ ;

б)  $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$ ,  $y(2) = 0$ ,  $y'(2) = 4$ ;

в)  $y'' \cdot y^3 = -1$ ,  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 0$ ;

г)  $y^4 - y^3 y'' = 1$ ,  $y(0) = \sqrt{2}$ ,  $y'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$+ C_1$ ;

Відповідь: а)  $y = x^3 + 3x + 1$ ; б)  $y = \frac{2}{5}\sqrt{2}x^{5/2} - \frac{16}{5}$ ; в)  $y = \sqrt{2x - x^2}$ ;

г)  $y = \sqrt{1 + e^{2x}}$ .

14.2.5. Розв'язати рівняння:

а)  $yy'' + (y')^2 = x$ ; б)  $xy'' = y'(e^y - 1)$ ; в)  $xyy'' + x(y')^2 = 3yy'$ .

Вказівка: виділити похідну або використати однорідність.

Відповідь: а)  $y^2 = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$ ; б)  $x = \ln \left| \frac{C_1x^{C_1}}{C_2 - x^{C_2}} \right|$ ; в)  $y^2 = C_1x^4 + C_2$

14.3. Домашнє завдання.

14.3.1. Розв'язати рівняння:

а)  $y''' = x + 2$ ;                      б)  $y'' = \sin 2x$ ;

Відповідь: а)  $y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$ ; б)  $y = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1x + C_2$

14.3.2. Розв'язати рівняння, які не містять шуканої функції:

а)  $y'' = \frac{y'}{x} + x$ ;      б)  $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$ ;

в)  $xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}$ .



Відповідь: а)  $y = \frac{1}{3}x^3 + C_1x^2 + C_2$ ; б)  $y = (1 + C_1^2) \ln |x + C_1| - C_1x + C_2$ ;  
в)  $C_1^2y = (C_1^2x^2 + 1) \operatorname{arctg} C_1x - C_1x + C_2$ ,  $2y = k\pi x^2 + C$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

14.3.3. Розв'язати рівняння, які явно не містять незалежної змінної:

а)  $1 + (y')^2 = 2yy''$ ; б)  $(y')^2 + 2yy'' = 0$ ; в)  $y'' = y' \left( \frac{y'}{y} + 2\sqrt{\frac{y'}{y} - 4} \right)$ .

Відповідь: а)  $(x + C_2)^2 = 4C_1(y - C_1)$ ; б)  $y = C_1(x + C_2)^{\frac{2}{3}}$ ;  
в)  $\ln |C_1y| = 2 \operatorname{tg}(2x + C_2)$ .

14.3.4. Знайти частинні розв'язки рівнянь:

а)  $yy'' = 2x(y')^2$ ,  $y(2) = 2$ ,  $y'(2) = 0,5$ ;

б)  $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$ ,  $y(2) = 2$ ,  $y'(2) = 1$ ;

в)  $y'' = e^{2y}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ;

г)  $2y'' - 3y^2 = 0$ ,  $y(-2) = 1$ ,  $y'(-2) = -1$ .

Вказівка: як нову функцію взяти  $p = \frac{y'}{y}$ .

Відповідь: а)  $(3-x)y^5 = 8(x+2)$ ; б)  $y - 2 = \ln \frac{x^2}{4}$ ; в)  $y = -\ln|1 - e^{-2y}|$ ;  
г)  $y(x+4)^2 = 4$ .

14.3.5. Розв'язати рівняння:

а)  $yy'' + (y')^2 = 1$ ;    б)  $y'' + \frac{y}{x} - \frac{y}{x^2} = 0$ .

Відповідь: а)  $y^2 + C_1 = (x + C_2)^2$ ; б)  $y = C_1x + \frac{C_2}{x}$ .

14.4. Завдання для самостійної роботи.

14.4.1. Розв'язати рівняння:

а)  $y''' = \frac{1}{x}$ ;      б)  $xy^{(5)} = y^{(4)}$ ;  
в)  $y''' = (y'')^3$ ;    г)  $yy''' - y'y'' = 0$ .

—  $x$ ;

Відповідь: а)  $y = x^2 \ln \sqrt{x} + C_1x^2 + C_2x + C_3$ ;  
б)  $y = C_1x^5 + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5$ .

## Заняття 15

Лінійні однорідні рівняння другого порядку. Вронськіан.  
Формула Ліувілля – Остроградського. Властивості розв'язків  
лінійного однорідного та неоднорідного рівнянь

15.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками.

15.2. Завдання для роботи в аудиторії.

15.2.1. Перевірити, чи можуть подані функції становити фундаментальну систему розв'язків рівняння:

а)  $1, \cos x, \sin x$ ; б)  $1, \sin^2 x, \cos 2x$ ;

в)  $1, x, x^3$ ; г)  $x, 1, x + 5$ .

Відповідь: а), в) – так; б), г) – ні.

15.2.2. Розв'язати рівняння  $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ , якщо його частинний розв'язок  $y_1 = x$ .

Вказівка: зробити заміну  $y = zx$ .

Н.  
язків

альну

Відповідь:  $y = C_1 \left( x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - 2 \right) + C_2 x$ .

15.2.3. Знайти частинний розв'язок рівняння  $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$  за умов  $y(1) = 0$ ;  $y'(1) = 1$ , якщо  $y_1 = e^x$  є частинним розв'язком цього рівняння.

СТИННИЙ

Відповідь:  $y = x^2 - e^{x-1}$ .

15.3. Домашнє завдання.

15.3.1. Перевірити, чи є вказані функції лінійно незалежними:

- а)  $x, x + 2, x^2 + 4$ ;    б)  $\sin x, \sin 3x, \sin 5x$ ;  
в)  $1, \sin 2x, \cos 2x$ ;    г)  $x + 2, 6 - x, 4 + 3x$ .

Відповідь: а), б), в) – незалежні; г) – залежні.

15.3.2. Розв'язати рівняння  $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$ , якщо  $y_1 = \frac{\sin x}{x}$  – його частиний розв'язок.

Відповідь:  $y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$ .

## Заняття 16

Однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Варіація довільної сталої для неоднорідного рівняння

16.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками.

16.2. Завдання для роботи в аудиторії.

16.2.1. Розв'язати рівняння:

а)  $y'' - 6y' + 5y = 0$ ;   б)  $y'' - 4y' = 0$ ;

в)  $y'' - 2y' + y = 0$ ;   г)  $y'' - 2y' + 2y = 0$ .

істин-

Відповідь: а)  $y = c_1 e^x + c_2 e^{5x}$ ; б)  $y = c_1 + c_2 e^{4x}$ ; в)  $y = e^x (c_1 + c_2 x)$ ;  
г)  $y = e^x (c_1 \sin x + c_2 \cos x)$ .

16.2.2. Розв'язати рівняння з початковими умовами:

а)  $y'' - 8y' - 9y = 0$ ,  $y(0) = 8$ ,  $y'(0) = 2$ ;

б)  $y'' - 4y' + 8y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 4$ .

Відповідь: а)  $y = e^{9x} + 7e^{-x}$ ; б)  $y = 2e^{2x} \sin 2x$ .

16.2.3. Розв'язати рівняння:

а)  $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$ ;      б)  $y'' + y = \operatorname{ctg} x$ .

Відповідь: а)  $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} - x e^{2x} + x \ln |x| e^{2x}$ ;  
б)  $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \left( \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \sin x$ .

16.2.4. Розв'язати рівняння з початковими умовами  $y'' - 6y' + 9y = \frac{e}{1+x}$   
 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ .

Відповідь:  $y = e^{3x} (2 - 6x + x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2})$ .



16.2.5. Розв'язати рівняння  $y'' + y' = \frac{e^{-x}}{x}$ .

Відповідь:  $y = C_1 + C_2 e^{-x} + e^{-x} \ln |x| - \int_0^x \frac{e^x}{x} dx$ .

16.3. Домашнє завдання.

16.3.1. Розв'язати рівняння:

а)  $y'' - 3y' + 2y = 0$ ;      б)  $y'' + y' = 0$ ;  
в)  $y'' - 4y' + 4y = 0$ ;      г)  $y'' + 4y = 0$ .

Відповідь: а)  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ ; б)  $y = c_1 + c_2 e^{-x}$ ; в)  $y = e^{2x}(c_1 + c_2 x)$ ;  
г)  $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ .

16.3.2. Розв'язати рівняння з початковими умовами:

а)  $y'' - 5y' + 6y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 5$ ;  
б)  $y'' - 6y' + 10y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 10$ .

Відповідь: а)  $y = e^{2x} + e^{3x}$ ; б)  $y = 10e^{3x} \sin x$ .

16.3.3. Розв'язати рівняння:

а)  $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{1+x}$ ; б)  $y'' - y' = \frac{e^x}{1+e^x}$ .

Відповідь: а)  $y = e^{3x}(c_1 + c_2x) + xe^{3x} \ln|1+x| + e^{3x}(x - \ln|1+x|)$ ;  
б)  $y = e^x(c_1 + x) - (e^x + 1) \ln(e^x + 1) + c_2$ .

16.3.4. Знайти частинний розв'язок рівняння, який задовольняє умови  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

Відповідь:  $y = \left(x + \frac{4}{3}x\sqrt{x}\right)e^x$ .

16.4. Завдання для самостійної роботи:

а)  $4y'' + 4y' + y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 0$ ;

б)  $y'' + 4y' + 29y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 15$ ;

в)  $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x^2+1}}$ .

Відповідь: а)  $y = (x + 2) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ ; б)  $y = 3e^{-2x} \sin 5x$ ;  
в)  $y = e^{2x} (C_1 + C_2x + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2})$ .

## Заняття 17

### Диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами зі спеціальною правою частиною

17.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками.

17.2. Завдання для роботи в аудиторії.

Розв'язати рівняння (17.2.1 - 17.2.5):

17.2.1.  $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ .

Відповідь:  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}$ .

17.2.2.  $y'' - y = 2 \sin x - 4 \cos x$ .

Відповідь:  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 2 \cos x - \sin x$ .

$$17.2.3. y'' + 4y' + 5y = 10x^2 + x + 2.$$

Відповідь:  $y = e^{-2x}(c_1 \sin x + c_2 \cos x) + 2x^2 - 3x + 2.$

$$17.2.4. y'' - 5y' + 6y = 2e^x + e^{3x}.$$

Відповідь:  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + e^x + x e^{3x}.$

$$17.2.5. y'' - 5y' - 6y = 7e^{-x} + 6x^2 - 2x.$$

Відповідь:  $y = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-x} - x e^{-x} - x^2 + 2x - 2.$

17.2.6. Не обчислюючи невизначені коефіцієнти, записати частинні розв'язки, що відповідають заданим правим частинам рівняння  $y'' - 4y' + 8y = f_n(x)$ :

$$\begin{aligned} f_1 &= x^3 + xe^x, & y_1 &= \\ f_2 &= e^{-2x}(x + \sin x), & y_2 &= \\ f_3 &= e^{2x} \cos x, & y_3 &= \\ f_4 &= e^{2x} \cos 2x, & y_4 &= \\ f_5 &= \operatorname{sh} 2x \sin 2x, & y_5 &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_6 &= (x \sin 2x + \cos 2x)e^x, & y_6 &= \\ f_7 &= \cos^2 x, & y_7 &= \end{aligned}$$

17.2.7. Знайти частинний розв'язок, який відповідає заданим початковим умовам:

$$y'' - 2y' = 2e^x, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 0.$$

Відповідь:  $y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1.$

17.3. Домашнє завдання.

Розв'язати рівняння (17.3.1 - 17.3.5):

17.3.1.  $y'' - 6y' + 5y = e^{2x}$ .

Відповідь:  $y = c_1 e^x + c_2 e^{5x} - \frac{1}{3} e^{2x}$ .

17.3.2.  $y'' - 4y = \cos 2x + 4 \sin 2x$ .

Відповідь:  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x$ .

17.3.3.  $y'' + 2y' + 2y = 3x + 4$ .

Відповідь:  $y = e^{-x}(c_1 \sin x + c_2 \cos x) + 1,5x + 0,5$ .

17.3.4.  $y'' - 2y' + y = x + e^x$ .

Відповідь:  $y = (c_1 + c_2x)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x + x + 2$ .

17.3.5.  $y'' - 4y' + 13y = xe^{2x}$ .

Відповідь:  $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + \frac{1}{9}xe^{2x}$ .

17.3.6. Знайти частинні розв'язки, що задовольняють початкові умови:

а)  $y'' + y = 4e^x$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = -3$ ;

б)  $y'' - y' = 2(1 - x)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .



Відповідь: а)  $y = 2e^x + 2 \cos x - 5 \sin x$ ; б)  $y = e^x + x^2$ .

17.4. Завдання для самостійної роботи:

а)  $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$ ;      б)  $2y'' + 5y' = 29 \cos x$ ;

в)  $y'' - 4y' + 4y = \operatorname{sh} 2x$ .

Відповідь: а)  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 3x e^{2x}$ ; б)  $y = c_1 + c_2 e^{-\frac{5}{2}x} + 5 \sin x - 2 \cos x$ ;

$$y = e^{2x} \left( c_1 + c_2 x + \frac{x^2}{4} \right) - \frac{e^{-2x}}{32}.$$

### Заняття 18

Рівняння Ейлера. Диференціальні рівняння вище другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Системи рівнянь

18.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками.

18.2. Завдання для роботи в аудиторії.

18.2.1. Розв'язати рівняння Ейлера:

а)  $x^2 y'' - 9xy' + 21y = 0$ ;                      б)  $x^2 y'' - xy' + y = 2x$ .

Вказівка: нова незалежна змінна  $t = \ln x$ .

Відповідь: а)  $y = c_1 x^3 + c_2 x^7$ ; б)  $y = c_1 x + c_2 x \ln |x| + x^2 \ln^2 |x|$ .

d.  
.  
б  
=  
=  
x  
y.  
=  
+  
д

18.2.2. Розв'язати однорідні рівняння:

а)  $y''' - 4y'' + 5y' = 0$ ;    б)  $y^{IV} - 2y'' + y = 0$ ;    в)  $y''' - 4y' = 0$ ;  
г)  $y^V - 9y''' = 0$ ;    д)  $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ .

Відповідь: а)  $y = c_1 + e^{-2x}(c_2 \sin x + c_3 \cos x)$ ; б)  $y = e^x(c_1 + c_2x) + e^{-x}(c_3 + c_4x)$ ; в)  $y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$ ; г)  $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{3x} + c_5e^{-3x}$ ;  
д)  $y = \sin x(c_1 + c_2x) + \cos x(c_3 + c_4x)$ .

18.2.3. Розв'язати рівняння:

а)  $y''' - 3y'' + 3y' - y = xe^x$ ;    б)  $y^{IV} - y'' = 1$ .

Відповідь: а)  $y = e^x\left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \frac{1}{24}x^4\right)$ ; б)  $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3 + c_4x - \frac{x^2}{2}$ .

Розв'язати системи диференціальних рівнянь за методом виключення  
(18.2.4, 18.2.5):

$$18.2.4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 7x, \\ \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0. \end{cases}$$

Відповідь:  $x = e^{-6t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$ ;  $y = e^{-6t}((c_2 + c_1) \cos t + (c_2 - c_1) \sin t)$

$$18.2.5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x + e^t + e^{-t}. \end{cases}$$

Відповідь:  $x = e^t \left( c_1 + \frac{t}{2} \right) + e^{-t} \left( c_2 - \frac{t}{2} \right)$ ;  $y = e^t \left( c_1 + \frac{1}{2} + \frac{t}{2} \right) + e^{-t} \left( c_2 - \frac{1}{2} + \frac{t}{2} \right)$

18.3. Домашнє завдання.

18.3.1. Розв'язати рівняння Ейлера:

а)  $x^2 y'' + xy' + y = x$ ;      б)  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x$ .

Відповідь: а)  $y = c_1 \cos \ln |x| + c_2 \sin \ln |x| + \frac{x}{2}$ ; б)  $y = c_1 x + c_2 x^2 + x^3 + x \ln |x|$ .

18.3.2. Розв'язати однорідні рівняння:

а)  $y^{IV} - 16y = 0$ ;      б)  $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0$ ;

в)  $y''' + y' = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = -1$ .

)  $\sin t$ ).

$\frac{t}{2}$ ).

Відповідь: а)  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$ ;

б)  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-3x}$ ; в)  $y = 1 + \cos x$ .

18.3.3. Розв'язати рівняння:

а)  $y^{(5)} + y''' = x^2 - 1$ ;      б)  $y^{(4)} - y = \cos x$ .

Відповідь: а)  $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4 \cos x + c_5 \sin x + \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{2}x^3$ ;

б)  $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3 \sin x + c_4 \cos x - \frac{1}{4}x \sin x$ .

Розв'язати системи (18.3.4 - 18.3.6):

18.3.4. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

Відповідь:  $x = e^t(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$ ;  $y = e^t(c_1 \sin 3t - c_2 \cos 3t)$ .

$$* 18.3.5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$$

Відповідь:  $x = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-7t} + \frac{7}{40} e^t + \frac{1}{5} e^{-2t}$ ;  
 $y = \frac{1}{2} c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-7t} + \frac{1}{40} e^t + \frac{3}{10} e^{-2t}$ .

$$18.3.6. \begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} = x, \\ \frac{d^2 x}{dt^2} = y. \end{cases}$$

Відповідь:  $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t$ ;  $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - c_3 \cos t - c_4 \sin t$ .

## Заняття 19

Матричний метод запису й інтегрування систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

19.1. Ознайомитися з теорією та методичними вказівками.

19.2. Завдання для роботи в аудиторії.

Розв'язати системи за матричним методом інтегрування:

$$19.2.1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x - y. \end{cases}$$

Відповідь:  $x = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$ ,  $y = -2c_1 e^t - c_2 e^{3t}$ .

$$19.2.2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$$

Вказівка: частинний розв'язок шукати за методом варіації довільних сталих.



Відповідь:  $x = c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}$ ;  $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}$ .

$$19.2.3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

Вказівка: власні значення матриці  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = -1$ .

Відповідь:  $x = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t}$ ;  $y = c_1 e^t - 3c_3 e^{-t}$ ;  $z = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - 5c_3 e^{-t}$ .

$$19.2.4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z, \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z. \end{cases}$$

Вказівка:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$ .

Відповідь:  $x = c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$ ,  $y = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ ,  $z = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$ .

$$19.2.5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y - 2z - 3x, \\ \frac{dy}{dt} = x + z, \\ \frac{dz}{dt} = 6x - 6y + 5z. \end{cases}$$

Відповідь:  $x = c_1 e^t + c_3 e^{-t}$ ,  $y = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ ,  $z = 2c_2 e^{2t} - c_3 e^{-t}$ .

19.3. Домашнє завдання.

Розв'язати системи за матричним методом інтегрування:

$$19.3.1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Відповідь:  $x = c_1 e^t + c_2 e^{5t}$ ,  $y = -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t}$ .

$$19.3.2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$$

Вказівка: частинний розв'язок шукати за методом варіації довільних сталих.

Відповідь:  $x = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + t e^t - e^{4t}$ ,  $y = -c_1 e^t + c_2 e^{3t} - (t+1)e^t - 2e^{4t}$ .

$$19.3.3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

Вказівка: частинний розв'язок шукати за методом варіації довільних сталих.

Відповідь:  $x = c_1 + 2c_2 e^{-t} + 2e^{-t} \ln |e^t - 1|$ ,  $y = -2c_1 - 3c_2 e^{-t} - 3e^{-t} \ln |e^t - 1|$ .

$$19.3.4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y - z, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y + z, \\ \frac{dz}{dt} = x - z. \end{cases}$$

Вказівка:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$ .

Відповідь:  $x = c_1 + 3c_2e^{2t}, y = -2c_2e^{2t} + c_3e^{-t}, z = c_1 + c_2e^{2t} - 2c_3e^{-t}$ .

$$19.3.5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \frac{dz}{dt} = 4x - 4y + 4z. \end{cases}$$

Вказівка:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ .

Відповідь:  $x = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{5t}$ ,  $y = c_1 e^t - 2c_2 e^{2t} + c_3 e^{5t}$ ,  
 $z = -c_1 e^t - 3c_2 e^{2t} + 3c_3 e^{5t}$ .

## Заняття 20

### Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь

20.1. Розв'язок  $x = \varphi(t)$  диференціального рівняння  $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ , визначений для всіх  $t \geq t_0$ , називається стійким (у розумінні Ляпунова), якщо для будь-якого  $\epsilon > 0$  існує таке  $\delta(\epsilon) > 0$ , що для будь-якого розв'язку цього рівняння  $x = x(t)$ , початкове значення якого задовольняє нерівність  $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$ , при всіх  $t \geq t_0$  виконується нерівність  $|x(t) - \varphi(t)| < \epsilon$ .

Розв'язок  $x = \phi(t)$  називається асимптотично стійким, якщо він стійкий і виконується гранична рівність  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \phi(t)| = 0$ .

Якщо розв'язок не є стійким, то він називається нестійким. Якщо зробити заміну  $x = y + \phi(t)$ , то дослідження на стійкість зводиться до дослідження тривіального розв'язку  $y = 0$ .

Стійкість розв'язків лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами або лінійної однорідної системи зі сталою матрицею коефіцієнтів залежить від коренів характеристичного рівняння. Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння від'ємні, то всі розв'язки асимптотично стійкі. Розв'язок є стійким, якщо дійсні частини недодатні, а корінь з нульовою дійсною частиною не є кратним. Якщо хоч один з коренів характеристичного рівняння має додатну дійсну частину, то розв'язки нестійкі.

Дослідження диференціального рівняння  $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$  та його особливої точки  $(x_0, y_0)$ , що задовольняє рівняння  $Q(x_0, y_0) = 0, P(x_0, y_0) = 0$ , можна замінити дослідженням системи  $\frac{dy}{dt} = Q(x, y); \frac{dx}{dt} = P(x, y)$ . Точка  $(x_0, y_0)$  є положенням рівноваги системи.

Якщо система має вигляд  $\frac{dx}{dt} = ax + by, \frac{dy}{dt} = cx + dy$ , то характеристичне рівняння  $\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$ . Якщо корені дійсні, різні та одного знака, то особлива точка – вузол ( $\lambda_{1,2} > 0$  – нестійкий,  $\lambda_{1,2} < 0$  – стійкий). Якщо корені різних знаків, то особлива точка – сідло, якщо ж корені комплексні й дійсна частина від'ємна, то маємо стійкий фокус, якщо корені чисто уявні – центр.

Якщо система не є лінійною, то дослідження стійкості за першим наближенням дає відповідь тільки тоді, якщо дійсні частини коренів характеристичного рівняння не дорівнюють 0.

Якщо характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

то дійсні частини всіх його коренів від'ємні тоді і тільки тоді, коли додатні всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца (теорема Гаусса – Гурвіца)

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}, \text{ тобто коли } \Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \text{ і т.д.}$$



20.2. Завдання для роботи в аудиторії.

20.2.1. Дослідити на стійкість розв'язки таких рівнянь:

а)  $\frac{dx}{dt} = \frac{k}{t}x, x(1) = 0;$       б)  $\frac{dx}{dt} = 1 + t - x, x(0) = 0.$

Відповідь: а)  $k \leq 0$  – розв'язок стійкий,  $k < 0$  – асимптотично стійкий,  $k > 0$  – нестійкий; б) розв'язки асимптотично стійкі.

20.2.2. Дослідити на стійкість розв'язки системи  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y, \end{cases}$  зобразити графічно траєкторії розв'язків та показати напрямок руху по траєкторіях. Чи є положення рівноваги  $M(0, 0)$  стійким?

Відповідь: усі розв'язки та положення рівноваги є нестійкими.

20.2.3. Дослідити на стійкість розв'язки системи  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y, \end{cases}$   
зобразити графічно траєкторії і показати напрямок руху.

Відповідь: розв'язки стійкі, рух – проти стрілки годинника.

20.2.4. Знайти всі дійсні значення  $\alpha$  та  $\beta$ , при яких розв'язки системи

рівнянь  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + \alpha y + \beta z, \\ \frac{dy}{dt} = -\alpha x - y + \alpha z, \\ \frac{dz}{dt} = -\beta x - \alpha y - z \end{cases}$

асимптотично стійкі.

Відповідь: розв'язки стійкі при будь-яких  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ .

20.2.5. Чи є стійкими розв'язки рівняння  $16y^{IV} + 32y''' + 24y'' + 8y' + y = 0$ ?

Відповідь: розв'язки асимптотично стійкі.

20.2.6. Дослідити стійкість положень рівноваги системи 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\sin x - 2y \end{cases}$$

за методом першого наближення.

Відповідь: точка  $M_1(0, 0)$  – стійке положення рівноваги, точка  $M_2(\pi, 0)$  – нестійке.

20.3. Домашнє завдання.

Дослідити стійкість розв'язків рівнянь і систем рівнянь (20.3.1 - 20.3.3):

20.3.1.  $\frac{dy}{dx} = x - y, y(0) = 1.$

Відповідь: розв'язок стійкий.

20.3.2. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y, \\ \frac{dy}{dt} = -x, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 0.$$

Відповідь: розв'язок стійкий.

$$20.3.3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + x^2 + y^2, \\ \frac{dy}{dt} = 3x^3 - x + 3y. \end{cases}$$

Вказівка: дослідити за першим наближенням.

Відповідь: розв'язки не є стійкими.

20.3.4. При яких значеннях параметра  $\alpha$  розв'язки системи  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$  стійкі?

Відповідь: якщо  $\alpha = -2$ ,  $\alpha = -2,5$  – розв'язки стійкі; якщо  $-2,5 < \alpha < -2$ , розв'язки асимптотично стійкі.

$$20.3.5. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - z, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2z, \\ \frac{dz}{dt} = 5x - 4z. \end{cases}$$

Чи є стійкими розв'язки системи?

Відповідь: розв'язки не є стійкими.

# Контрольна робота № 1

## Варіант 1

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{\arcsin^2 x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

2.  $\int \frac{x dx}{1-\cos x}.$

3.  $\int \frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2(x^2+1)} dx.$

4.  $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$

5.  $\int (x+1) \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} dx.$

6.  $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лінією  $y^2 = x^2 - x^4.$

8. Знайти довжину дуги лінії  $\begin{cases} y = \ln t, \\ x = 2\sqrt{3-t}, \end{cases} t \in [1; 2].$

9. Знайти площу поверхні обертання лінії  $\rho = \cos \varphi, \varphi \in [0; \frac{\pi}{4}]$ , навколо осі  $OX.$

10. Дослідити на збіжність  $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx.$

11. Циліндр висотою  $H$  і радіусом  $R$  заповнено газом і закрито поршнем. Обчислити роботу, яку потрібно витратити на ізотермічне стиснення газу за законом  $PV = C = const$  при переміщенні поршня на відстань  $h.$

## Варіант 2

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 3}{\cos^2 x} dx.$

2.  $\int \frac{x \sin x}{(1+\cos x)^2} dx.$

3.  $\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x - 1}{(x+2)^2(x^2+x+1)} dx.$

4.  $\int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x)(1-\sin x)}.$

5.  $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx.$

6.  $\int_0^{\ln 2} \operatorname{ch}^4 x dx.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лінією  $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3. \end{cases}$

8. Знайти довжину дуги лінії  $\rho = \cos^4 \frac{\varphi}{4}.$

9. Знайти об'єм тіла обертання лінії  $y = \arctg x, x \in [0; 1]$ , навколо осі  $OX.$

10. Знайти  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$

11. Обчислити опір при проходженні електричного струму через провідник у формі зрізаного конуса з основами радіусами  $a$  та  $b$  і висотою  $H.$

### Варіант 3

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x dx}{\sqrt{4+\operatorname{ch}^2 x}}$ .

2.  $\int \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1}) dx}{\sqrt{x^2+1}}$ .

3.  $\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)} dx$ .

4.  $\int \frac{\cos x - \sin x}{(1+\sin x)^2} dx$ .

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}\sqrt{x+2}\sqrt{x}}$ .

6.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x dx}{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}$ .

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $y = \frac{\ln x}{4x}$  та  $y = x \ln x$ .

8. Знайти довжину лінії  $\begin{cases} x = \sin^4 t, \\ y = \cos^4 t. \end{cases}$

9. Знайти площу поверхні обертання лінії  $\rho = \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ ,  $\varphi \in [0; \pi]$ , навколо осі  $OX$ .

10. Дослідити на збіжність  $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^{\sin x} - e^{-\sin x}} dx$ .

11. Швидкість розпаду радіо пропорційна наявній його кількості. Знайти залежність зміни маси радіо  $q(t)$ , якщо початкова його маса дорівнює  $q_0$ , а через час  $T$  його кількість зменшиться в два рази.

### Варіант 4

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx$ .

2.  $\int x \operatorname{th}^2 x dx$ .

3.  $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx$ .

4.  $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx$ .

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$ .

6.  $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ .

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $\begin{cases} x = t^2 - t, \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}$  і  $x = 0$ .

8. Знайти довжину дуги лінії  $y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ ,  $x \in [1; 2]$ .

9. Знайти площу поверхні обертання лінії  $\rho = \frac{1}{\varphi}$ ,  $\varphi \in [1; \frac{4}{3}]$ , навколо осі  $OX$ .

10. Дослідити на збіжність  $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+e^x)} dx$ .

11. Швидкість охолодження тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою тіла  $T$  і сталою температурою повітря  $T_1$ . Знайти залежність температури від часу, якщо його початкова температура дорівнює  $T_0$ .



## Варіант 5

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{\ln \ln x}{x \ln x} dx.$

2.  $\int \frac{x dx}{1 + \cos x}.$

3.  $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x^2-x+1)}.$

4.  $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$

5.  $\int \frac{\sqrt{x^2+1} dx}{x + \sqrt{x^2+1}}.$

6.  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{(\operatorname{tg} x + 4) \cos 2x}.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $\rho = 4 \cos 3\varphi$  та  $\rho = 2$  ( $\rho \geq 2$ ).

8. Знайти довжину дуги лінії  $\begin{cases} x = \ln \cos t, \\ y = \ln \sin t, \end{cases} t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right].$

9. Знайти об'єм тіла обертання лінії  $y = \operatorname{tg}^2 x$ ,  $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$ , навколо осі  $OX$ .

10. Знайти  $\int_1^{\infty} x \arcsin \frac{1}{x} dx.$

11. Знайти силу тиску води на вертикальний прямокутний шлюз з основою 18 м і висотою 6 м.

## Варіант 6

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^4 x}} dx.$

2.  $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx.$

3.  $\int \frac{4x^3 + 24x^2 + 20x - 28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)} dx.$

4.  $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}.$

5.  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}.$

6.  $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $\rho = \sqrt{3} \cos \varphi$ ,  $\rho = \sin \varphi$ ,  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

8. Знайти довжину дуги лінії  $y = x^2 + x + 1$ ,  $x \in [0; 1]$ .

9. Знайти площу поверхні обертання лінії  $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$ , навколо осі  $OX$ .

10. Дослідити на збіжність  $\int_1^{\infty} \ln \frac{x+1}{x} \sqrt{\arcsin \frac{1}{x}} dx.$

11. Обчислити роботу, яку потрібно виконати, щоб викачати воду з резервуара у формі конуса висотою  $H$  і радіусом  $R$ .

## Варіант 7

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{2 \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\sqrt{4 \operatorname{ch}^2 x + 1}} dx.$

2.  $\int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$

3.  $\int \frac{2x^3 + 11x^2 + 16x + 10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)} dx.$

4.  $\int \sin^4 x \cos^2 x dx.$

5.  $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1}} dx.$

6.  $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{2 + \sin x + \cos x}.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лінією  $y^2 = (1 - x^2)^3$ .

8. Знайти довжину дуги лінії  $\rho = e^{-\varphi}$ ,  $\varphi \in [0; \frac{\pi}{3}]$ .

9. Знайти об'єм тіла обертання лінії  $y = e^{2\sqrt{x}}$ ,  $x \in [0; 1]$ , навколо осі  $OX$ .

10. Дослідити на збіжність  $\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{\ln x} dx.$

11. Обчислити роботу, яку потрібно витратити, щоб розтягнути пружину на 6 см, якщо сила в 1 кг розтягує її на 1 см.

## Варіант 8

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{dx}{2^x + 1}.$

2.  $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

3.  $\int \frac{3x^3 + 4x^2 + 6x}{(x^2+2)(x^2+2x+2)} dx.$

4.  $\int \frac{\sin x}{1+2 \sin x} dx.$

5.  $\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2} dx.$

6.  $\int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + x + 1}{\sqrt{x^2+1}} dx.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \end{cases} y = 3, y \geq 3.$

8. Знайти довжину дуги лінії  $y = \ln \frac{5}{2x}$ ,  $x \in [\sqrt{3}; \sqrt{8}]$ .

9. Знайти площу поверхні обертання лінії  $\rho = 1 + \cos \varphi$ , навколо осі  $OX$ .

10. Знайти  $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}} dx.$

11. Обчислити кінетичну енергію колового диска масою  $M$  і радіусом  $R$ , який обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  навколо осі, що проходить через його центр перпендикулярно до його площини.

## Варіант 9

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}}$ .

2.  $\int \arcsin^2 2x dx$ .

3.  $\int \frac{2x^3+4x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)} dx$ .

4.  $\int \frac{\sin^2 x}{1-\operatorname{tg} x} dx$ .

5.  $\int \frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{x^2} dx$ .

6.  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$ .

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $x^2 - y^2 = 1$ ,  $y^2 = \frac{3}{2}x$ .

8. Знайти довжину дуги лінії  $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \frac{1+t}{t}, \end{cases} x \in [0; 1]$ .

9. Знайти об'єм тіла обертання лінії  $y = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ ,  $x \in [1; 2]$ , навколо осі

$OX$ .

10. Дослідити на збіжність  $\int_1^{\infty} \frac{\ln^3 x}{x^{3/2}} dx$ .

11. Обчислити роботу, яку треба витратити, щоб викачати воду з циліндричної цистерни радіусом  $R$  і висотою  $H$ .

## Варіант 10

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \operatorname{th} x \ln \operatorname{ch} x dx$ .

2.  $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$ .

3.  $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x^2-x+1)^2}$ .

4.  $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$ .

5.  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$ .

6.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$ .

7. Знайти площу фігури, обмеженої лінією  $\rho = \sin 5\varphi$ .

8. Знайти довжину дуги лінії  $y = 2x^2 + x + 3$ ,  $x \in [0; 2]$ .

9. Знайти площу поверхні обертання лінії  $\begin{cases} y = \operatorname{sh} t, \\ x = \operatorname{ch} t, \end{cases} t \in [0; 1]$ , навколо

осі  $OX$ .

10. Дослідити на збіжність  $\int_0^1 \frac{\ln \cos x dx}{\sqrt{x-x^2}(e^x-1)^2}$ .

11. З якою силою півкільце радіусом  $R$  і масою  $M$  діє на матеріальну точку масою  $m$ , яка розташована в його центрі.

## Варіант 11

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \operatorname{th}^2 x \operatorname{ch} x dx.$  2.  $\int x \arccos(2x + 1) dx.$

3.  $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)} dx.$  4.  $\int \frac{dx}{4 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}.$

5.  $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}.$  6.  $\int \frac{e^x + 3}{e^{2x} - 1} dx.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $\rho = 6 \cos 3\varphi$  та  $\rho = 3$  ( $\rho \geq 3$ ).

8. Знайти довжину дуги лінії  $\begin{cases} y = t^2 + t + 3, \\ x = t^2 - 4t + 5, \end{cases} t \in [0; 1].$

9. Знайти об'єм тіла обертання лінії  $y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ ,  $x \in [0; 1]$ , навколо осі  $OX$ .

10. Дослідити на збіжність  $\int_1^{\infty} \frac{\ln x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\sqrt{1+x}} dx.$

11. Платівка у формі параболічного сегмента  $x^2 \leq y \leq 1$  обертається навколо осі параболу з кутовою швидкістю  $\omega$ . Знайти кінетичну енергію платівки.

## Варіант 12

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{e^{\operatorname{th} x} + \operatorname{cth} x}{\operatorname{ch}^2 x} dx.$  2.  $\int \frac{x \cos x}{(1 + \sin x)^2} dx.$

3.  $\int \frac{x^3 + x}{(x^2 - x + 1)^2} dx.$  4.  $\int \frac{\sin^2 x}{(1 + \cos x + \sin x)^2} dx.$

5.  $\int x \sqrt{x^2 + 4x - 5} dx.$  6.  $\int_0^1 e^x \sqrt{e^x + 2 + e^{-x}} dx.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $\begin{cases} y = t^2 - 1, \\ x = \frac{t}{t^2 + 1}, \end{cases} y = 0.$

8. Знайти довжину лінії  $\rho = 2 \sin \varphi$ .

9. Знайти об'єм тіла обертання дуги лінії  $y = \operatorname{ctg}^2 x$ ,  $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ , навколо осі  $OX$ .

10. Дослідити на збіжність  $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2} dx.$

11. Швидкість тіла, яке кинули вертикально вгору з початковою швидкістю  $V_0$ , дорівнює  $V = V_0 - gt$ . На яку максимальну висоту підніметься тіло?

### Варіант 13

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

$$1. \int \frac{\ln x}{x \sqrt[3]{1-4 \ln^2 x}} dx.$$

$$2. \int \operatorname{ch} 2x \sin x dx.$$

$$3. \int \frac{2x^3+6x^2+15}{(x+2)(x+1)^3} dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}.$$

$$5. \int \frac{x^4+1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx.$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^6 x}.$$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = 0$ .

8. Знайти довжину дуги лінії  $y = \sqrt{x}$ ,  $x \in [0; 1]$ .

9. Знайти площу поверхні обертання лінії  $\rho = \sqrt{\sin^2 \varphi}$  навколо осі  $OX$ .

10. При якому  $\alpha$  інтеграл  $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$  збіжний?

11. Обчислити роботу, яку треба витратити при побудові піраміди з квадратною основою. Висота піраміди  $H$ , сторона квадрата  $a$ , густина матеріалу  $\gamma$ .

### Варіант 14

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

$$1. \int \frac{x \arcsin x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

$$2. \int \frac{x dx}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$3. \int \frac{x^3+x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

$$5. \int \sqrt[3]{x(1-x^2)} dx.$$

$$6. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2+x}}.$$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $\rho^2 = 2 \cos 2\varphi$ ,  $\rho = 1$ ,  $\rho \geq 1$ .

8. Знайти довжину дуги лінії  $y = \sqrt{2-x}$ ,  $x \in [0; 1]$ .

9. Знайти площу поверхні обертання лінії  $\begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \operatorname{sh} t, \end{cases} t \in [0; 1]$ , навколо осі  $OX$ .

$$10. \text{Обчислити } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

11. Знайти кінетичну енергію однорідного колового циліндра густиною  $\gamma$ , радіусом основи  $R$  і висотою  $H$ , який обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  навколо своєї осі.

## Варіант 15

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}$ .

2.  $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}} dx$ .

3.  $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 8x + 8}{(x+1)^2(x^2+2)} dx$ .

4.  $\int \frac{dx}{(3 + \sin x) \sin x \ln 2}$ .

5.  $\int \sqrt{\frac{x-2}{x-6}} dx$ .

6.  $\int_0^{\ln 2} \operatorname{th}^5 x dx$ .

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $\begin{cases} y = \sin^4 t, \\ x = \cos^4 t, \end{cases} x = 0, y = 0$ .

8. Знайти довжину дуги лінії  $\rho = 3(1 + \sin \varphi)$ .

9. Знайти об'єм тіла обертання лінії  $y = \sqrt{x} \operatorname{tg} x$ ,  $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$ , навколо осі  $OX$ .

10. Обчислити  $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ .

11. Знайти масу стрижня довжиною 5 м, якщо лінійна щільність стрижня змінюється за законом  $\gamma = 1 + 0,1x^3$ , де  $x$  - відстань від одного з кінців стрижня.

## Варіант 16

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{2x^{11} + x^5}{x^{12} + 1} dx$ .

2.  $\int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$ .

3.  $\int \frac{2x dx}{(1+x)(1+x^2)^2}$ .

4.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$ .

5.  $\int \frac{x dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$ .

6.  $\int_0^1 \frac{e^{\frac{x}{2}} dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}$ .

7. Знайти площу фігури, обмеженої лінією  $\rho = \cos \varphi - \sin \varphi$ .

8. Знайти довжину дуги лінії  $\begin{cases} y = 2\sqrt{t^3}, \\ x = t^2 - t, \end{cases} t \in [1; 3]$ .

9. Знайти об'єм тіла обертання лінії  $y = \cos^3 x$ ,  $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ , навколо осі  $OX$ .

10. Дослідити на збіжність  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ .

11. Знайти кількість тепла, яке виділяється змінним струмом  $I = I_0 \cos \omega t$  за період  $\frac{2\pi}{\omega}$  у провіднику з опором  $R$ .

## Варіант 17

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \sqrt{\frac{2 \sin x + 1}{\sin x}} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx.$

2.  $\int \frac{\ln(x^2 - 1)}{x^2} dx.$

3.  $\int \frac{3x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$

4.  $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}.$

5.  $\int \frac{\sqrt[3]{1 + 4\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

6.  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $(x - 1)(y + 2) = 2$ ,  $x + y = 2$ .

8. Знайти довжину дуги лінії  $\rho = \sin^4 \frac{\varphi}{4}$ .

9. Знайти площу поверхні обертання лінії  $\begin{cases} x = \operatorname{ch}^3 t, \\ y = \operatorname{sh}^3 t, \end{cases} t \in [0; 1]$ , навколо осі  $OX$ .

10. Дослідити на збіжність  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{1 + x^4}}$ .

11. Швидкість розмноження бактерій пропорційна їх кількості в кожний момент часу. Кількість бактерій подвоюється протягом трьох годин. Знайти залежність кількості бактерій від часу.

## Варіант 18

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$

2.  $\int \frac{x e^x}{\sqrt{1 + e^x}} dx.$

3.  $\int \frac{3x^3 - 2}{x^3 - x} dx.$

4.  $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$

5.  $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$

6.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x dx}{2 \cos x + 4}.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $\begin{cases} y = 4 \sin^3 t, \\ x = 8 \cos^3 t, \end{cases} x \geq 3\sqrt{3}$ .

8. Знайти довжину дуги лінії  $y = x^2 - 2x + 1$ ,  $x \in [2; 4]$ .

9. Знайти площу поверхні обертання лінії  $\rho = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ ,  $\varphi \in [0; \frac{\pi}{4}]$ , навколо осі  $OX$ .

10. Дослідити на збіжність  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx.$

11. При зміні температури опір металевих провідників змінюється за законом  $R = R_0(1 + 0,004T)$ , де  $R_0$  – опір при температурі  $0^\circ\text{C}$ ,  $T$  – температура. Провідник, опір якого при  $0^\circ\text{C}$  дорівнював 10 Ом, рівномірно нагрівається від  $T_1 = 20^\circ\text{C}$  до  $T_2 = 200^\circ\text{C}$  за 10 хвилин. У цей час по ньому йде струм під напругою 120 В. Скільки кулонів електрики пройде за цей час через провідник?

## Варіант 19

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{2\sqrt{x} + 2^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

2.  $\int x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx.$

3.  $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 7}{(x+1)(x+2)^3} dx.$

4.  $\int \frac{dx}{1 - \sin^4 x}.$

5.  $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2} dx.$

6.  $\int \frac{\ln^3 x^2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} dx.$   
 $\ln 2$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $\begin{cases} y = \sqrt{t}, \\ x = \frac{t}{t+1}, \end{cases} y = 0, x = \frac{1}{2}.$

8. Знайти довжину дуги лінії  $\rho = 8 \cos \varphi, \varphi \in [0; \frac{\pi}{4}].$

9. Знайти об'єм тіла обертання лінії  $y = \frac{x+1}{x^2+1}, x \in [0; 1],$  навколо осі  $OX.$

10. Дослідити на збіжність  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx.$

11. Знайти подовження важкого стрижня конічної форми із закріпленою основою та вершиною, яка напрямлена вниз. Радіус основи дорівнює  $R,$  висота конуса –  $H$  і щільність –  $\gamma$  (подовження пропорційне напруженню у відповідному перерезі).

## Варіант 20

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}} dx.$

2.  $\int \frac{\ln \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}^2 x} dx.$

3.  $\int \frac{4x^2 + 3x + 4}{(x^2+1)(x^2+x+1)} dx.$

4.  $\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\cos^5 x} dx.$

5.  $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x + \sqrt{x^2+1})}.$

6.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x}.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $\rho = \sin \varphi, \rho = \cos \varphi + \sin \varphi.$

8. Знайти довжину дуги лінії  $y = \ln \cos x, x \in [0; \frac{\pi}{6}].$

9. Знайти площу поверхні обертання лінії  $\begin{cases} x = 3 \cos t - \cos 3t, \\ y = 3 \sin t - \sin 3t, \end{cases} t \in [0; \pi],$

навколо осі  $OX.$

10. Знайти  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x}.$

11. Ізольованому провіднику надано заряд  $Q = 100 \text{ К}.$  Провідник витрачає заряд зі швидкістю, яка пропорційна наявному заряду провідника. Який заряд залишиться на провіднику через 10 хв, якщо за першу хвилину витрачено 10 К?



## Варіант 21

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$

2.  $\int \frac{x dx}{1+\sin x}.$

3.  $\int \frac{2x^2+3x+2}{x(x^2+x+1)^2} dx.$

4.  $\int \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2} dx.$

5.  $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4} dx.$

6.  $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^{2x}+4e^x+5}.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = \arccos t, \end{cases} x = 2.$

8. Знайти довжину дуги лінії  $\rho = \sin \varphi + \cos \varphi, \varphi \in [0; \frac{\pi}{4}].$

9. Знайти об'єм тіла обертання лінії  $y = x \cos x, x \in [0; \frac{\pi}{2}],$  навколо осі  $OX.$

10. Знайти  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}.$

11. Моторний човен рухається у спокійній воді зі швидкістю  $V_0 = 20$  км/год. На повному ході його мотор вимикають, і через 40 с швидкість човна зменшується до  $V_1 = 8$  км/год. Опір води пропорційний швидкості руху човна. Визначити швидкість човна через 2 хв після вимкнення мотора.

## Варіант 22

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}(\operatorname{tg} x + 1)}{\sin^2 x} dx.$

2.  $\int \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{x}) dx.$

3.  $\int \frac{(x+4) dx}{(x^2+x+2)(x^2+2)}.$

4.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}.$

5.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$

6.  $\int_0^1 \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $x = y^2(y - 1), x = 0.$

8. Знайти довжину дуги лінії  $\rho = \cos^6 \frac{\varphi}{6}, \varphi \in [\pi; 2\pi].$

9. Знайти площу поверхні обертання лінії  $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases} t \in [0; \frac{\pi}{2}],$  навколо осі  $OX.$

10. Знайти  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$

11. Ракета стартує вертикально вгору з початковою швидкістю  $V_0 = 100$  м/с. Опір повітря сповільнює її рух і надає ракеті від'ємне прискорення  $-kV^2.$  Знайти час підйому в найвище положення.

## Варіант 23

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 x}} dx.$

2.  $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx.$

3.  $\int \frac{4x^2 + x + 1}{(x^2 - 2x + 6)^2} dx.$

4.  $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}.$

5.  $\int \frac{dx}{x^2(x + \sqrt{x^2 + 1})}.$

6.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sh} x \cos 3x dx.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $y = x^2 \sqrt{4 - x^2}$ ,  $y = 0$ .

8. Знайти довжину дуги лінії  $\rho = \cos^2 \varphi$ .

9. Знайти площу поверхні обертання лінії  $\begin{cases} x = \operatorname{ch}^3 t, \\ y = \operatorname{sh}^3 t, \end{cases} t \in [0; 1]$ , навколо осі  $OX$ .

10. Дослідити на збіжність  $\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$

11. З висоти кинуто вниз тіло масою  $m$ . Знайти закон зміни швидкості  $V$  падіння тіла, якщо на нього діють сила ваги і гальмуюча сила опору повітря, яка пропорційна швидкості.

## Варіант 24

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}} dx.$

2.  $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx.$

3.  $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4x + 5)} dx.$

4.  $\int \frac{\cos x dx}{5 + 4 \cos x}.$

5.  $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 1}}.$

6.  $\int_1^5 \frac{dx}{x + \sqrt{2x - 1}}.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $\rho = \sqrt{3} \sin \varphi$ ,  $\rho = 1 - \cos \varphi$  ( $\rho \geq 1 - \cos \varphi$ ).

8. Знайти довжину дуги лінії  $\begin{cases} x = \frac{t^6}{6} + \frac{t^4}{4}, \\ y = \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2}, \end{cases} t \in [0; 1].$

9. Знайти об'єм тіла обертання лінії  $y = \sqrt{x} \operatorname{tg} x$ ,  $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$ , навколо осі  $OX$ .

10. Обчислити  $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x+1)^3} dx.$

11. Кінець труби, яка занурена горизонтально у воду, закрито заслонкою. Знайти тиск води на заслонку, якщо її радіус  $R$ , а центр знаходиться на глибині  $H$  ( $H > R$ ) під водою.

## Варіант 25

1.  $\int \frac{\sqrt{2+\operatorname{tg} \sqrt{x}}}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$

2.  $\int x \cos^3 x dx.$

3.  $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)} dx.$

4.  $\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}.$

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}.$

6.  $\int_{-1}^1 \sqrt{3-2x-x^2} dx.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $\begin{cases} x = \sqrt{t+1}, \\ y = t\sqrt{t^2-1}, \end{cases} y = 0, x = 2.$

8. Знайти довжину дуги лінії  $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), x \in [0; 1].$

9. Знайти площу поверхні обертання лінії  $\rho = \frac{1}{\varphi}, \varphi \in [1; \frac{4}{3}],$  навколо осі  $OX.$

10. Обчислити  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$

11. Куля лежить на дні басейну глибиною  $H.$  Обчислити роботу, яку треба витратити, щоб витягти кулю з води. Радіус кулі дорівнює  $R,$  а її щільність  $-\gamma.$

## Варіант 26

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{e^{\sqrt{\operatorname{tg} x+2}} dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x+2} \cos^2 x}.$

2.  $\int \frac{1}{x^2} \ln \frac{x+1}{x-1} dx.$

3.  $\int \frac{2x^3-6x^2+7x}{(x+2)(x-1)^3} dx.$

4.  $\int \frac{(1+\operatorname{ctg} x) dx}{(\sin x+2 \cos x)^2}.$

5.  $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

6.  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $x = 4 - (y-1)^2, x = y^2 - 4y + 3.$

8. Знайти довжину лінії  $\rho = \cos^5 \frac{\varphi}{5}.$

9. Знайти площу поверхні обертання лінії  $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - \frac{t^3}{3}, \end{cases} t \in [0; 1],$  навколо осі  $OX.$

10. Дослідити на збіжність  $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} dx.$

11. Куля входить у дошку зі швидкістю  $V_0$  і вилітає з неї, пробивши її, зі швидкістю  $V_1.$  Сила опору дошки руху кулі дорівнює  $-kV^2.$  Скільки часу рухалася куля у дошці?

## Варіант 27

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{\cos x dx}{(1+\sin x)\sqrt{\sin x}}$ .

2.  $\int \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$ .

3.  $\int \frac{2x^3+7x^2+7x+9}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)} dx$ .

4.  $\int \frac{6 \sin^2 x dx}{4+3 \cos 2x}$ .

5.  $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} dx$ .

6.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin^4 x + \cos^4 x) dx$ .

7. Знайти площу фігури, обмеженої лінією  $\rho = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi$ .

8. Знайти довжину дуги лінії  $\begin{cases} x = t^2 - 3t + 1, \\ y = t^2 + t + 4, \end{cases} t \in [3; 4]$ .

9. Знайти об'єм тіла обертання лінії  $y = \frac{1}{\sin x \cos^2 x}$ ,  $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ , навколо осі  $OX$ .

10. Дослідити на збіжність  $\int_0^1 \frac{2^{\sin x} - 1}{x \ln(1+\sqrt{x})} dx$ .

11. У резервуар, який містить 20 л води, безперервно зі швидкістю 5 л/хв надходить розчин, у кожному літрі якого міститься 0,2 кг солі. В резервуарі розчин переміщується, і суміш витікає з резервуара з тією ж швидкістю. Скільки буде солі у резервуарі через 4 хв?

## Варіант 28

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x + \ln x)}$ .

2.  $\int \arccos^2 x dx$ .

3.  $\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+1)} dx$ .

4.  $\int \frac{\cos x + \sin x + 2}{\cos x - \sin x - 1} dx$ .

5.  $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$ .

6.  $\int_0^1 \frac{\ln(x^2+1)}{(x+1)^2} dx$ .

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{t^2+1}), \\ y = t^2 + t, \end{cases} y = 0$ .

8. Знайти довжину дуги лінії  $y = \ln \sin x$ ,  $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

9. Знайти площу поверхні обертання лінії  $\rho = \frac{1}{\sin \varphi}$ ,  $\varphi \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ , навколо осі  $OX$ .

10. Обчислити  $\int_1^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} dx$ .

11. Обчислити роботу, яку потрібно витратити, щоб викачати воду з котла, який має форму параболоїда обертання з основою радіусом  $R$  і висотою  $H$ .

## Варіант 29

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{\arctg \frac{1}{x}}{1+x^2} dx.$

2.  $\int \frac{x \ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}} dx.$

3.  $\int \frac{0,5x^2+5}{x(x^2+2x+10)^2} dx.$

4.  $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2 \sin x}.$

5.  $\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{16-x^2}}.$

6.  $\int_0^1 (x+1) \operatorname{sh}^2 x dx.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лініями  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $y^2 = 2x - 1$ .

8. Знайти довжину дуги лінії  $\begin{cases} x = \frac{2}{3}\sqrt{(t+1)^3}, \\ y = \frac{1}{2}t^2 + t + 1, \end{cases} t \in [0; 1].$

9. Знайти площу поверхні обертання лінії  $\rho = \sin \varphi$ , навколо осі  $OX$ .

10. Дослідити на збіжність  $\int_0^1 \ln^4 x dx.$

11. Тіло рухається за законом  $x = ct^3$ , де  $x$  - довжина шляху за час  $t$ ,  $c = \text{const}$ . Опір середовища пропорційний квадрату швидкості, причому коефіцієнт пропорційності дорівнює  $k$ . Обчислити роботу опору середовища при переміщенні тіла від точки  $x = 0$  до точки  $x = a$ .

## Варіант 30

Знайти інтеграли (приклади 1 - 6):

1.  $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+x^2}} dx.$

2.  $\int e^{-x} (\sin 2x - \cos 2x) dx.$

3.  $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx.$

4.  $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx.$

5.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$

6.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln \sin x - \ln \cos x}{\cos^2 x} dx.$

7. Знайти площу фігури, обмеженої лінією  $\rho = \sin 6\varphi$ .

8. Знайти довжину дуги лінії  $\begin{cases} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t. \end{cases}$

9. Знайти об'єм тіла обертання лінії  $y = \sqrt{x} \ln x$ ,  $x \in [1; 2]$ , навколо осі  $OX$ .

10. Знайти  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

11. У циліндричній посудині об'ємом  $V_0$  повітря, яке утримується під атмосферним тиском  $P_0$ , стискають до об'єму  $V_1$  за законом  $PV^\gamma = \text{const}$ . Обчислити роботу стиску.

## Контрольна робота № 2

### Варіант 1

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $xy' = y \ln y$ .
2.  $(2x + ye^{xy})dx + (xe^{xy} + 3y^2)dy = 0$ .
3.  $y \sin x + y' \cos x = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .
4.  $yy'' - 2yy' \ln y = y'^2$ .
5.  $y'' - 8y' + 7y = x^2$ .
6.  $y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}, y(0) = 1, y'(0) = 0$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$$

### Варіант 2

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' = e^{x+y}$ .
2.  $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y, y(1) = 2$ .
3.  $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$ .
4.  $2y'' = 5y^4, y(0) = 1, y'(0) = -1$ .
5.  $y'' + 4y' + 13y = \sin x$ .
6.  $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{e^{-x} + 1}$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 8t, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - y. \end{cases}$$

### Варіант 3

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' = \frac{x+1}{y-1}$ .
2.  $(2x + 2xe^{x^2-y^2})dx - 2ye^{x^2-y^2}dy = 0$ .
3.  $y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2-1}$ .
4.  $(y'')^2 = y'^2 + 1$ .
5.  $y'' - y = 2x, y(0) = 0, y'(0) = -1$ .
6.  $y'' - y' = \frac{e^x}{1+e^x}$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2e^t. \end{cases}$$

## Варіант 4

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' = 5^{x+2y}$ .
2.  $y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ .
3.  $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$ .
4.  $(y' + 2y)y'' = (y')^2$ .
5.  $y'' + 4y = 1, y(0) = 0, y'(0) = -2$ .
6.  $y'' + y' = \frac{1}{2+e^x}$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 3y + \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y - 2 \cos t. \end{cases}$$

## Варіант 5

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $\sin x \cos y dx + \cos x \sin y dy = 0$ .
2.  $e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0$ .
3.  $(xy' - 1) \ln x = 2y$ .
4.  $1 + (y')^2 = 2yy''$ .
5.  $y'' + 4y = \sin x, y(0) = 0, y'(0) = 1$ .
6.  $y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1}$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y - 8, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$$

## Варіант 6

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $2\sqrt{xy}' = y, y(4) = 1$ .
2.  $y = (\sqrt{y^2 - x^2} + x)y'$ .
3.  $y' - \frac{xy}{x^2+3x+2} = x$ .
4.  $yy'' = y'^2 - y'^3, y(1) = 1, y'(1) = -1$ .
5.  $y'' + y = \cos x$ .
6.  $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x+5}$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + 2 \sin t. \end{cases}$$

## Варіант 7

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $2\sqrt{xy}' = y, y(4) = 1.$

2.  $y = (\sqrt{y^2 - x^2} + x)y'.$

3.  $y' - \frac{xy}{x^2 + 3x + 2} = x.$

4.  $yy'' = y^2 - y'^3, y(1) = 1, y'(1) = -1.$

5.  $y'' + y = \cos x.$

6.  $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x+5}.$

7.  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + 2 \sin t. \end{cases}$

## Варіант 8

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $xydx + (x+1)dy = 0.$

2.  $y(xy' - y) = \sqrt{x^4 + y^4}.$

3.  $y' - \frac{y}{x+3} = x.$

4.  $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0.$

5.  $y'' + 4y' + 8y = xe^{-2x}.$

6.  $y'' + 4y = \operatorname{tg}^2 2x.$

7.  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 5 \sin t. \end{cases}$

## Варіант 9

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' - xy^2 = 2xy.$

2.  $3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy.$

3.  $y' + \frac{y}{x+1} = (x+1)^2.$

4.  $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)(y')^2 = 0.$

5.  $y'' - 6y' + 10y = xe^{3x}.$

6.  $y'' + y = \frac{1}{\sin 2x}.$

7.  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y + 3e^t. \end{cases}$



## Варіант 10

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' - xy^2 = 2xy$ .
2.  $3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy$ .
3.  $y' + \frac{y}{x+1} = (x+1)^2$ .
4.  $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)(y')^2 = 0$ .
5.  $y'' - 6y' + 10y = xe^{3x}$ .
6.  $y'' + y = \frac{1}{\sin 2x}$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y + 3e^t. \end{cases}$$

## Варіант 11

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $3y^2y' + 16x = 2xy^3$ .
2.  $\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}dx + (y + \arcsin x)dy = 0$ .
3.  $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$ .
4.  $xy'' + 2y' = 0$ .
5.  $y'' + 3y' - 4y = x + e^{-x}$ .
6.  $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - x + 1, \\ \frac{dy}{dt} = 3y - 2x. \end{cases}$$

## Варіант 12

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $xy' + y = y^2$ .
2.  $xy' = y + x \operatorname{ctg} \frac{y}{x}$ .
3.  $(2x + 1)y' = 4x + 2y$ .
4.  $y'' \operatorname{cth} 2x = 2y'$ .
5.  $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$ .
6.  $y'' + 4y = 4 \operatorname{ctg} 2x$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$$

### Варіант 13

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' = 10^{x-y}$ .
2.  $(x + \cos xe^y)dx + (y + \sin xe^y)dy = 0$ .
3.  $y = x(y' - x \cos^2 x)$ .
4.  $y''(3 + yy'^2) = y'^4$ .
5.  $y'' + 4y' + 5y = \cos 2x$ .
6.  $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x(e^x+1)}$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + 1 + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y. \end{cases}$$

### Варіант 14

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $2x^2yy' + y^2 = 2$ .
2.  $y'(2x - y) = x + 2y, y(3) = 8$ .
3.  $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1}$ .
4.  $(x+1)y'' + y' = x+1$ .
5.  $y'' + y' = x + \sin^2 x$ .
6.  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

### Варіант 15

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' - xy^3 = 2xy^2$ .
2.  $(\cos y + y \cos x)dx + (\sin x - x \sin y)dy = 0$ .
3.  $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, y(1) = 3$ .
4.  $y'' + 8 \sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$ .
5.  $y'' - y = 1 + xe^x$ .
6.  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+9}$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y + e^{-2t}, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y - 3e^{-2t}. \end{cases}$$

## Варіант 16

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' \operatorname{ctg} x + y = 2, y(0) = -1.$

2.  $(3x + y)dx = (2x + 3y)dy.$

3.  $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1.$

4.  $y''x \ln x = y'.$

5.  $y'' + 2y' - 3y = \sin x.$

6.  $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x.$

7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y - e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x. \end{cases}$$

## Варіант 17

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, y(2) = 0.$

2.  $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy = 0.$

3.  $xy' + 2y = x^4.$

4.  $y'' = (y')^3.$

5.  $y'' + y' - 6y = xe^{2x}.$

6.  $y'' + 9y = \operatorname{tg} 3x.$

7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} + 3x + y = t + 2. \end{cases}$$

## Варіант 18

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' = 6^{4x-3y}.$

2.  $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}.$

3.  $y' - \frac{y}{x} = x^2, y(1) = 0.$

4.  $y'' = \frac{y'}{x+1} + \frac{(x+1)^2}{y'}, y(1) = 0, y'(1) = 4.$

5.  $y'' + 2y' + 5y = \sin 2x.$

6.  $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x-7}.$

7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 2e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x + t^2. \end{cases}$$

## Варіант 19

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' = 5\sqrt[5]{y^4}$ ,  $y(0) = 1$ .
2.  $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$ .
3.  $\frac{1}{y'} = \sin^2 y + x \operatorname{ctg} y$ .
4.  $x^3y'' + x^2y' = 1$ .
5.  $y'' + 4y' = x + e^{2x}$ .
6.  $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 5 \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

## Варіант 20

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' = \operatorname{tg} 3x(y + 1)$ .
2.  $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$ ,  $y(3) = 1$ .
3.  $2(x + \ln^2 y - \ln y)y' = y$ .
4.  $x^3y'' + x^2y' = \sqrt{x}$ .
5.  $y'' + 2y' + 2y = x + e^{-x}$ .
6.  $y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{2}$ ,  $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + 1, \\ \frac{dy}{dt} = 4y - x + t. \end{cases}$$

## Варіант 21

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' \operatorname{tg} 2x = 2y + 3$ .
2.  $(x^3 - \sin 2y)dx + (y - 2x \cos 2y)dy = 0$ .
3.  $y' + \frac{y}{x} = \sin x$ ,  $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$ .
4.  $y''y^3 + 49 = 0$ ,  $y(3) = -7$ ,  $y'(3) = -1$ .
5.  $y'' + y = \sin x - \cos x$ .
6.  $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y. \end{cases}$$

## Варіант 22

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' \sin 2x = y + 5$ .
2.  $x^2 y' = y^2 + 4xy + 2x^2$ ,  $y(1) = 1$ .
3.  $xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y$ .
4.  $y'' = 128y^3$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 8$ .
5.  $y'' + 8y' + 17y = \sin x + x$ .
6.  $4y'' - 4y' + y = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{x+6}$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 3x + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x. \end{cases}$$

## Варіант 23

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $yy' = \operatorname{tg} x(y - 1)$ .
2.  $(2x + \ln y)dx + \frac{x}{y}dy = 0$ ,  $y(1) = 1$ .
3.  $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$ .
4.  $4y^3 y'' = y^4 - 1$ ,  $y(0) = \sqrt{2}$ ,  $y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .
5.  $y'' + 4y' = \sin 2x$ .
6.  $y'' - 2y' = \frac{2e^{3x}}{2+e^x}$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8y - x - t, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + 1. \end{cases}$$

## Варіант 24

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' \sin 2x = y \ln^2 y$ .
2.  $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ .
3.  $y - y' \cos x = y^2 \cos x(1 - \sin x)$ ,  $y(\pi) = 1$ .
4.  $y'' y^5 + 50 = 0$ ,  $y(0) = \sqrt{5}$ ,  $y'(0) = 1$ .
5.  $y'' + 2y' - 3y = x^2 + e^x$ .
6.  $y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y + 4. \end{cases}$$

## Варіант 25

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' = 10^{3x-2y}$ .

2.  $\left(3y^2 - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(6xy + \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0$ .

3.  $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ .

4.  $x^4 y'' + x^3 y' = 1$ .

5.  $y'' + y' - 2y = e^{-x}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

6.  $4y'' + y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ .

7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + x + 5y = e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

## Варіант 26

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $1 + y' = e^y$ .

2.  $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$ ,  $y(1) = 1$ .

3.  $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ .

4.  $xy'' - \frac{1}{4}(y'')^2 - y' = 0$ .

5.  $y'' + 5y' = xe^{-5x}$ .

6.  $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3+e^{-x}}$ .

7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y + t. \end{cases}$$

## Варіант 27

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' = 1 + e^{-y}$ .

2.  $\left(\frac{1}{x+y} + y \sin xy\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} + x \sin xy\right)dy = 0$ .

3.  $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}$ ,  $y(1) = 1$ .

4.  $y''(2y' + x) = 1$ .

5.  $y'' + 8y' = \sin 2x$ .

6.  $y'' - y' = \frac{e^{-x}}{2+e^x}$ .

7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = y - 4x. \end{cases}$$

## Варіант 28

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' = 5^{2x+4y}$ .
2.  $2xyy' = x^2 + y^2$ .
3.  $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .
4.  $xy'' + x(y')^2 = y'$ .
5.  $y'' + 7y' + 6y = xe^{-2x}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ .
6.  $y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + 1, \\ \frac{dy}{dt} = 3y - 2x. \end{cases}$$

## Варіант 29

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $xy' = y \ln y$ .
2.  $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$ ,  $y(1) = 1$ .
3.  $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ .
4.  $yy'' - 2yy' \ln y = y'^2$ .
5.  $y'' + 4y = \sin x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .
6.  $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x-7}$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y + 1 + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y. \end{cases}$$

## Варіант 30

Розв'язати рівняння та систему рівнянь:

1.  $y' - xy^2 = 2xy$ .
2.  $x^2y' = y^2 + 4xy + 2x^2$ ,  $y(1) = 1$ .
3.  $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$ .
4.  $y''x \ln x = y'$ .
5.  $y'' + 8y' + 17y = \sin x + x$ .
6.  $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$ .
7. 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 5 \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

## Список рекомендованої літератури

- Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968.
- Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1972.
- Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980.
- Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1981.
- Будак В. М., Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука, 1967.
- Вища математика: В 2 кн. / І. П. Васильченко, В. Я. Данилов, А. І. Лобанов, Е. Ю. Таран. – К.: Вища шк., 1994.
- Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 3 ч. – М.: Высш. шк., 1980. - Ч. 1.
- Забара С.И., Крашаница Ю.А. Элементы гармонического анализа: Учеб. пособие. – Х.: ХАИ, 1981.
- Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б. Н. Демидовича. – М.: Наука, 1981.
- Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Задачи и упражнения. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1971.
- Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1973.
- Ніколаєв О. Г. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. – Х.: Основа, 2000.
- Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: В 2 т. – М.: Наука, 1978.
- Практичний курс вищої математики: Навч. посібник для вузів. - У 4 кн. / Під ред О.Г. Ніколаєва, В.О. Рвачова, В.С. Проценка. – Х.: Нац. аерокосм. ун-т "Харк. авіац. ін-т", 2004.
- Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у прикладах та задачах. – К.: Вища шк., 1994.
- Сборник задач по линейной алгебре / Под ред. И.В. Проскурякова. – М.: Наука, 1974.
- Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981.
- Скибин А. А. Кратные интегралы и их приложения к задачам геометрии, механики, физики: Учеб. пособие. – Х.: ХАИ, 1988.
- Ушакова Е. Г., Желдакова Л. В. Дифференциальные уравнения: Учеб. пособие. – Х.: ХАИ, 1991.



Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1970.

Фролов С. В., Шостак Р. Я. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1989.

Шунда Н. М., Томусяк А. А. Практикум з математичного аналізу. Вступ до аналізу. Диференціальне числення. – К.: Вища шк., 1993.

Ярмолюк В. К., Лазарев А. И. Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра: Учеб. пособие. – Х.: ХАИ, 1983.