# Лекция №15

## Раздел 4. Численные методы

Раздел математики, где разработаны способы приближенного решения различных задач (решения уравнений, интегрирование, дифференцирование, нахождение экстремумов функций и т.д.) не алгебраическим путем и не методами математического анализа, а путем многократных арифметических действий над числами, называется "Численные методы" или "Вычислительная математика". История развития численных методов решения задач начинается еще во времена Ньютона. Однако лишь с появлением вычислительной техники данные методы нашли широкое применение. В данном разделе приведены самые простые методы, неэффективные в отношении скорости вычислений и дающие сравнительно грубые результаты, но имеющие то преимущество, что они максимально упрощены и доступны для понимания.

### Решение систем линейных уравнений

Многие задачи математического моделирования сводятся к системе n линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (4.1)$$

Систему уравнений (4.1) можно записать в матричной форме следующим образом

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{Bmatrix} \qquad (4.2)$$

или

$$\mathbf{[A]\{X\}=\{B\}} \qquad (4.3)$$

При исследовании многих моделей, связанных с решением задач в объемной постановке или из области экономики, приходится решать системы из нескольких тысяч или десятков тысяч уравнений. В этом случае особое внимание приходится уделять вопросам повышения эффективности и точности применяемых методов решения.

Все методы решения систем линейных уравнений делят на прямые и итерационные.

*Прямые методы* позволяют за конечное число действий получить точное решение системы уравнений (4.1), если входная информация (правая часть уравнений **{B}** и элементы $a_{ij}$ матрицы **[A]** заданы точно и вычисления ведутся без округления. Конечно, прямые методы также дают решение с определенной точностью, которая зависит от ошибок округления, т.е. от точности представлений данных в ЭВМ, от характера решаемых задач и от самого метода решения системы уравнений. К наиболее известным представителям прямых методов можно отнести метод Гаусса и метод квадратного корня.

*Итерационный метод* позволяет найти приближенное решение системы путем построения последовательности приближений (итераций), начиная с некоторого начального приближения. К данному классу методов относят метод итераций и метод Зейделя. При выборе того или иного метода исходят из мощности имеющейся вычислительной техники и требуемой точности получаемого решения. Для больших систем (более 10 тыс. уравнений), как правило, используют итерационные методы.

В качестве примера рассмотрим алгоритм наиболее часто применяемого метода - *метода Гаусса*. Как уже отмечалось, данный метод относится к прямым методам и позволяет получить решение за конечное число шагов. Алгоритм метода состоит из двух этапов или ходов: прямого и обратного. При прямом ходе система уравнений приводится к треугольному виду.

Пусть требуется решить следующую систему уравнений:

$$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 4, \quad (4.4a)$$

$$4x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \quad (4.4b)$$

$$8x_1 + 12x_2 + 8x_3 = 12. \quad (4.4c)$$

**Прямой ход**. Первый шаг метода Гаусса состоит в исключении из всех уравнений, кроме первого, неизвестного $x_1$. Разделим первое уравнение (4.4a) на $a_{11} = 2$:

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2. \quad (4.5)$$

Для исключения $x_1$ из уравнения (4.4b), умножим (4.5) на -4 и сложим с (4.4b). Аналогично, умножая (4.5) на -8 и складывая с (4.4c), исключим из него $x_1$:

$$-15x_2 - 10x_3 = -10, \quad (4.6a)$$

$$-20x_2 - 8x_3 = -4. \quad (4.6b)$$

Получили систему двух уравнений.

Второй шаг. Исключим $x_2$ из всех уравнений, кроме первого и второго. Для этого разделим (4.6a) на -15 :

$$x_2 + 0{,}67x_3 = 0{,}67 \quad (4.7)$$

Умножим (4.7) на 20 и сложим с (7.7b):

$$5{,}33x_3 = 9{,}33 \quad (4.8)$$

Третий шаг. Делим (4.8) на 5,33 : $x_3 = 1{,}75$.

В результате получили систему

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2, \\ x_2 + 0{,}67x_3 &= 0{,}67, \\ x_3 &= 1{,}75. \end{aligned} \quad (4.9)$$

с верхней треугольной матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0{,}67 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Обратный ход**. Из системы (4.9) последовательно находим:

3-е уравнение: $x_3 = 1{,}75$;

2-е уравнение: $x_2 = 0{,}67 - 0{,}67\, x_3 = -0{,}5$;

1-е уравнение: $x_1 = 2 - 4x_2 - 2x_3 = 0{,}5$.

Итак, решение системы уравнений (4.4) найдено:

$x_1 = 0{,}5;\ x_2 = -0{,}5;\ x_3 = 1{,}75$.

Ниже приведена запись алгоритма метода Гаусса на псевдокоде для системы из n уравнений с n неизвестными.

Алгоритм Метод Гаусса

```
procedure Метод Гаусса для системы уравнений [A]{X}={B}
Данные:      n - число неизвестных;
             A[1..n, 1..n] – квадратная матрица коэффициентов;
             B[1..n] – правая часть системы уравнений.
Результат:        B[1..n] – решение системы.
start
   for k:=1 to n-1                                   <= прямой ход
        if | Akk | < 10^-20 then
             Error(Элемент главной диагонали равен 0)
             Exit
        end if
        Bk := Bk / Akk          обработка к-ой строки
        for i := k+1 to n
             Aki := Aki / Akk
        next i
        for j := k+1 to n       обработка всех нижележащих строк
             if | Ajk | > 10^-20 then
                  Bj := Bj - Bk * Ajk
                  for i := k+1 to n
                       Aji := Aji - Ajk * Aki
                  next i
                  Ajk := 0
             end if
        next j
   next k
   Bn := Bn / Ann
   for j := n-1 to 1 step -1                         <= обратный ход
        for i := n to j+1 step -1
             Bj := Bj - Aji * Bi
        next i
   next j
return
```

**Решение обыкновенных дифференциальных уравнений**

Математическая постановка многих задач математического моделирования сводятся к системе *обыкновенных дифференциальных уравнений* (ОДУ). Простейшим ОДУ является уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{4.10}$$

Задачей решения ОДУ является нахождение таких функций y(x), которые будучи подставленными в ОДУ, обращают его в тождество. Например, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = ax + b$$

имеет решение:

$$y = \frac{ax^2}{2} + bx + c.$$

Если дано начальное условие, например

$$y_{|x=0} = y_0,$$

то можно найти значение константы *c:*

$$c = y_0.$$

Как правило, только в относительно простых случаях решение ОДУ можно найти аналитически, то есть в виде формул. Численные методы решения ОДУ позволяют найти решение *любого* ОДУ. Однако ответ получается не в виде аналитической зависимости, а в виде таблицы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| X | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
| Y | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ |

При этом задание начальных условий обязательно. Одним из простейших методов численного интегрирования ОДУ является метод **Эйлера**.

**<u>Метод Эйлера</u>**.

Пусть дифференциальное уравнение приведено к виду (4.10), а вид функции *f(x,y)* известен. Заменим приближенно дифференциалы приращениями. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x,y) \quad \text{или} \quad \Delta y = f(x,y)\Delta x. \tag{4.11}$$

Зададим начальные условия

$$y_{|x_0} = y_0$$

и выберем шаг $\Delta x$ приращения аргумента. Тогда, используя (4.11) можно последовательно вычислить значения $x$ и $y$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | $x_1=x_0+\Delta x$ | $x_2=x_1+\Delta x$ | $x_3=x_2+\Delta x$ |
| $y_0$ | $y_1=y_0+f(x_0,y_0)\,\Delta x$ | $y_2=y_1+f(x_1,y_1)\,\Delta x$ | $y_3=y_2+f(x_2,y_2)\,\Delta x$ |

или

$$x_{k+1}=x_k+\Delta x;$$
$$y_{k+1}=y_k+f(x_k,y_k)\,\Delta x. \tag{4.12}$$

При применении аналитического метода получаем решение в виде гладкой интегральной кривой уравнения (4.10) (см рис.4.1). Использование метода Эйлера позволяет получить последовательность точек, соединив которые можно построить *ломаную Эйлера*. С уменьшением шага интегрирования $\Delta x$ кривая Эйлера приближается к интегральной кривой. Для метода Эйлера характерна малая точность вычислений и систематическое накопление ошибок. Пример алгоритма, использующего метод Эйлера для системы уравнений первого порядка приведен в разделе 2.

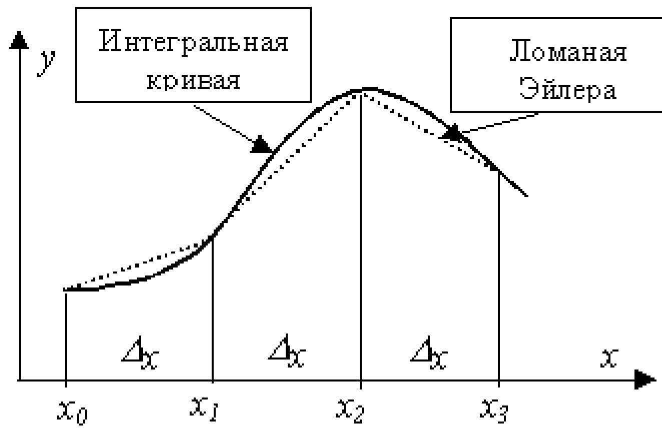


Рис. 4.1

Задачи динамики точки, как правило, приводят к системе двух ОДУ первого порядка по каждой координате. На каждом шаге по времени при вычислении новых скоростей точки значения действующих сил берутся на момент начала шага и не учитывается их изменение за шаг. Таким образом, принимается, что на шаге по времени точка движется под действием постоянных сил и с постоянным ускорением. Данное обстоятельство можно учесть при вычислении новой координаты точки. Если уравнение для координат решать после уравнения для скоростей, то в этом случае можно воспользоваться значениями скоростей точки на начало и на конец шага по времени. При равноускоренном движении пройденный путь равен произведению величины интервала времени на среднюю скорость точки на данном интервале. С учетом данного обстоятельства соотношения для скорости и координаты точки могут быть переписаны следующим образом

$$V_{k+1}=V_k+\Delta t\, F(t,\, x_k,\, V_k);$$

$$x_{k+1}=x_k+\Delta t\, (V_{k+1}+V_k)/2.$$

Приведенная схема вычислении соответствует модифицированному методу Эйлера и дает более точные результаты интегрирования.

**Метод Рунге-Кутта**.

Пусть дифференциальное уравнение приведено к виду (4.10), а вид функции $f(x,y)$ известен. Выберем шаг интегрирования $\Delta x$ и для краткости введем обозначения $x_k=x_0+k\Delta x$ и $y_k=y(x_k)$, ($k$=0,1,2,3,...).

Рассмотрим числа:

$$\begin{gathered} p_1^{(k)}= f(x_k,y_k)\,\Delta x, \\ p_2^{(k)}= f(x_k+\Delta x/2,\ y_k+ p_1^{(k)}/2)\,\Delta x, \\ p_3^{(k)}= f(x_k+\Delta x/2,\ y_k+ p_2^{(k)}/2)\,\Delta x, \\ p_4^{(k)}= f(x_k+\Delta x,\ y_k+ p_3^{(k)})\,\Delta x. \end{gathered} \tag{4.13}$$

Согласно обычному методу Рунге-Кутта последовательность значений $y_k$ искомой функции $y(x)$ определяются по формуле

$$y_{k+1}=y_k+\Delta y_k,$$

где

$$\Delta y_k=( p_1^{(k)}+2p_2^{(k)}+2p_3^{(k)}+p_4^{(k)})/6,\ (k=0,1,2,3,...). \tag{4.14}$$

Метод Рунге-Кутта обладает значительной точностью и, несмотря на свою трудоемкость, широко используется при численном решении ОДУ.

Основной сложностью при использовании численных методов интегрирования ОДУ является выбор величины шага интегрирования $\Delta x$. На практике величину шага $\Delta x$ выбирают двойным пересчетом: вначале определяют $y_k$ с шагом $\Delta x$, а затем с шагом $\Delta x/2$. Если расхождение результатов превысило некоторую малую заданную величину ε, то шаг уменьшают еще в два раза и повторяют вычисления. Уменьшение выполняют до тех пор пока не будет достигнута заданная точность вычислений.