Лекция №10

Раздел 2. Этапы построения математической модели.

Выбор и обоснование выбора метода решения задачи

При использовании разработанных математических моделей, как правило, требуется найти зависимость некоторых неизвестных заранее параметров объекта моделирования (например, координаты и скорость центра масс тела, точность броска), удовлетворяющих определенной системе уравнений. Таким образом, поиск решения задачи сводится к отысканию некоторых зависимостей искомых величин от исходных параметров модели. Как уже было отмечено в разделе 1, все методы решения соответствующих задач, составляющих "ядро" математических моделей, можно подразделить на аналитические и алгоритмические. Следует отметить, что при использовании аналитических решений для получения результатов "в числах" также часто требуется разработка соответствующих алгоритмов, реализуемых на ЭВМ. Однако исходное решение при этом представляет собой аналитическое выражение (или их совокупность). Решения же, основанные на алгоритмических методах, принципиально не сводимы к точным аналитическим решениям соответствующей задачи.

Выбор того или иного метода исследования в значительной степени зависит от квалификации и опыта членов рабочей группы. Как уже было отмечено, аналитические методы более удобны для последующего анализа результатов, но применимы лишь для относительно простых моделей. В случае, если соответствующая математическая задача (хотя бы и в упрощенной постановке) допускает аналитическое решение, последнее, без сомнения, предпочтительнее численного, о чем уже говорилось в 1-ом разлеле. Как справедливо говорит по этому поводу академик А.Б.Мигдал "*...раньше чем пользоваться счетными машинами, задачу необходимо всесторонне исследовать аналитическими методами. Аналитические методы - "старое, но грозное оружие" - не теряют своего значения*".

Алгоритмические методы сводятся к некоторому алгоритму, реализующему вычислительный эксперимент с использованием ЭВМ. Точность моделирования в подобном эксперименте существенно зависит от использованного метода и его параметров (например, шага интегрирования). Алгоритмические методы, как правило, более трудоемки в реализации, требуют хорошего знания от членов рабочей группы методов вычислительной математики, обширной библиотеки специального программного обеспечения и мощной вычислительной техники. Современные модели на базе алгоритмических методов разрабатываются в исследовательских организациях, которые зарекомендовали себя как авторитетные научные школы в соответствующей области знания.

Как отмечалось в разделе 1 приближенные и численные методы исследования поставленных математических задач относятся к обширному разделу современной математики - вычислительной математике. Численные методы применимы лишь для корректных математических задач, что является существенным ограничением на применение данных методов в математическом моделировании.

Общим для всех численных методов является сведение математической задачи к конечномерной. Это чаще всего достигается дискретизацией исходной задачи, то есть переходом от функции непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента. Например, траектория центра тяжести баскетбольного мяча ищется не как непрерывная функция времени, а как табличная (дискретная) функция координат от времени, то есть определяющая значения координат лишь для конечного числа моментов времени. Полученное решение дискретной задачи принимается за приближенное решение исходной математической задачи.

Выделяют три основных составляющих возникающей погрешности при численном решении исходной задачи:

- *неустранимая погрешность*, связанная с неточным заданием исходных данных задачи (начальные и граничные условия, коэффициенты и правые части уравнений);
- *погрешность метода*, связанная с переходом к дискретному аналогу исходной задачи (например, заменяя производную $y'(x)$ разностным аналогом $(y(x+\Delta x)-y(x))/\Delta x$, получаем погрешность дискретизации, имеющую при $\Delta x \to 0$ порядок Δx);
- *ошибка округления*, связанная с конечной разрядностью чисел, представляемых в ЭВМ.

Естественным требованием для конкретного вычислительного алгоритма является согласованность в порядках величин перечисленных трех видов погрешностей.

Численный или приближенный метод реализуется всегда в виде вычислительного алгоритма. Поэтому все требования, предъявляемые к алгоритму, применимы и к вычислительному алгоритму. Прежде всего, алгоритм должен быть реализуем, то есть давать решение задачи за допустимое машинное время. Важной характеристикой алгоритма является его *точность*, то есть возможность получения решения исходной задачи с заданной точностью $\varepsilon>0$ за конечное число $Q(\varepsilon)$ действий. Очевидно, чем меньше ε, тем больше затрачиваемое машинное время. Для очень малых ε время вычислений может быть недопустимо большим. Поэтому на практике добиваются некоторого компромисса между точностью и затрачиваемым машинным временем. Очевидно, что для каждой задачи, алгоритма и типа ЭВМ имеется свое характерное значение достигаемой точности.

Время работы алгоритма зависит от числа действий Q(ε) для достижения заданной точности. Для любой математической задачи, как правило, можно предложить несколько алгоритмов, позволяющих получить решение с заданной точностью, но за разное число действий Q(ε). Алгоритмы, затрачивающие меньшее число действий для достижения одинаковой точности, будем называть более *экономичными* или более *эффективными*.

В процессе работы вычислительного алгоритма на каждом акте вычислений возникает некоторая погрешность. При этом величина погрешности может от действия к действию нарастать или не возрастать (а в некоторых случаях - даже уменьшаться). Если погрешность в процессе вычислений неограниченно нарастает, то такой алгоритм называется *неустойчивым* или *расходящимся*. В противном случае алгоритм называется *устойчивым* или *сходящимся*.

Как уже было отмечено выше, вычислительная математика объединяет огромный пласт разнообразных быстро развивающихся численных и приближенных методов. Поэтому практически невозможно привести законченную классификацию данных методов. Стремление к получению более точных, эффективных и устойчивых вычислительных алгоритмов приводит к появлению многочисленных модификаций, учитывающих специфические особенности конкретной математической задачи или даже особенности моделируемых объектов.

Можно выделить следующие группы численных методов по объектам, к которым они применяются:

- интерполяция и численное дифференцирование;
- численное интегрирование;
- определение корней линейных и нелинейных уравнений;
- решение систем линейных уравнений (подразделяют на прямые и итерационные методы);
- решение систем нелинейных уравнений;
- решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- решение уравнений в частных производных;
- решение интегральных уравнений.

Огромное разнообразие численных методов в значительной степени затрудняет выбор того или иного метода в каждом конкретном случае. Учитывая, что для реализации одной и той же модели можно использовать несколько альтернативных алгоритмических методов, выбор конкретного метода обусловлен тем, какой из них подходит для данной модели с точки зрения обеспечения эффективности, устойчивости и точности результатов, а также более освоен и знаком членам рабочей группы. Освоение нового метода, как правило, очень трудоемко и связано с большими временными и финансовыми затратами. Основные затраты при этом связаны с разработкой и отладкой необходимого программного обеспечения для соответствующего класса ЭВМ, обеспечивающего поддержку данного метода. Следует отметить, что вычислительная математика в определенном смысле более являет собой искусство, нежели "науку" (в понимании последней как области культуры, базирующейся на формальной логике). Очень часто эффективность применяемых методов, разработанных программ определяется нарабатываемыми годы и десятки лет интуитивными приемами, не обоснованными с математических позиций. В связи с этим эффективность одного и того же метода может весьма существенно отличаться при его применении различными исследователями.

Пример

Аналитическое решение задачи о баскетболисте

Для получения решения рассмотренной выше задачи о баскетболисте в постановке (2.5)-(2.8) можно использовать как аналитические, так и численные методы. Проинтегрировав соотношения (2.5) по времени, получим

$$
\begin{aligned}
&x(t) = C_2 + C_1 t, && y(t) = C_4 + C_3 t - \frac{gt^2}{2},\\
&v_x(t) = C_1, && v_y(t) = C_3 - gt.
\end{aligned}
\qquad (2.9)
$$

Константы интегрирования найдем из начальных условий (2.6). Тогда решение задачи можно записать следующим образом

$$
\begin{aligned}
&x(t) = x_o + v_o t\cos\alpha_o, && y(t) = y_o + v_o t\sin\alpha_o - \frac{gt^2}{2},\\
&v_x(t) = v_o\cos\alpha_o, && v_y(t) = v_o\sin\alpha_o - gt.
\end{aligned}
\qquad (2.10)
$$

Примем для простоты, что в момент броска мяч находится в начале координат и на одном уровне с корзиной (т.е. $x_0 = y_0 = y_k = 0$). Под дальностью L броска будем понимать расстояние, которое пролетит мяч от точки броска до пересечения с горизонтальной плоскостью, проходящей через кольцо корзины. Из соотношений (2.10) для координат дальность броска выразится следующим образом

$$
L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha_o\,. \qquad (2.11)
$$

Тогда точность броска с учетом (2.7) будет равна

$$\Delta = L - x_k. \qquad (2.12)$$

Например, при броске мяча со штрафной линии можно принять следующие исходные данные:

$$x_0 = y_0 = y_k = 0;\ x_k = 4{,}225\text{м};\ v_o = 6{,}44\text{м/с};\ \alpha = 45^0.$$

Тогда из (2.11) и (2.12) имеем $L = 4{,}225$м; $\Delta = 0$м.

Пример

Алгоритмическое решение задачи о баскетболисте

В простейшем случае можно использовать метод Эйлера. Алгоритм решения данной задачи на псевдокоде приведен ниже.

Алгоритм 2.1.

```
program Задача о баскетболисте.
Данные:     m, R - масса и радиус мяча;
            xo, yo - начальные координаты мяча;
            vo, α - начальная скорость и угол броска мяча;
            xк, yк - координаты центра корзины;
            t - текущее время;
            dt - шаг по времени;
            fx, fy - силы, действующие на мяч;
            x, y, vx, vy - текущие координаты и проекции скорости мяча.
Результаты: L и Δ - дальность и точность броска.
start
      g := 9.81
      m := 0.6;            R := 0.12
      vo := 6.44;          α := 45
      xo := 0;             yo := 0
      xk := 4.225;         yk := 0
      vx := vo cos α
      vy := vo sin α
      dt := 0.1
      t := 0;
      x := xo;      y := yo
      while ((vy≥0) or ((vy<0) and (y ≥ yk )))
            t := t+dt
            fx := 0                        силы, действующие на мяч
            fy := - mg
            vx := vx+fx dt/m               компоненты скорости
            vy := vy+fy dt/m
            x := x + dt vx                 координаты мяча
            y := y + dt vy
      end while
      L := x - xo
      Δ := x - xk
stop
```