Лекция №9

Раздел 2. Этапы построения математической модели.

Математическая постановка задачи моделирования

Законченная концептуальная постановка позволяет сформулировать математическую постановку задачи моделирования, включающую совокупность различных математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования.

Математическая постановка задачи моделирования - это совокупность математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования.

Как было отмечено в разделе 1, совокупность математических соотношений определяют вид оператора модели. Наиболее простой вид оператор модели имеет в случае системы алгебраических уравнений. Подобные модели можно назвать моделями *аппроксимационного типа*, так как для их получения часто используют различные методы аппроксимации имеющихся экспериментальных данных о поведении выходных параметров объекта моделирования в зависимости от входных параметров и воздействий внешней среды, а также от значений внутренних параметров объекта.

Однако модели подобного типа имеют ограниченную область применимости. Для создания математических моделей сложных систем и процессов, применимых для широкого класса реальных задач, как уже отмечалось выше, требуется привлечение большого объема знаний, накопленных в рассматриваемой дисциплине (а в некоторых случаях - и в смежных областях). В большинстве дисциплин (особенно - в естественно - научных) эти знания сконцентрированы в аксиомах, законах, теоремах, имеющих четкую математическую формулировку.

Следует отметить, что во многих областях знаний (механике, физике, биологии и т.д.) принято выделять законы, справедливые для всех объектов исследования данной области знаний, и соотношения, описывающие поведение отдельных объектов или их совокупностей. К числу первых в физике и механике, например, относятся уравнения баланса массы, количества движения, энергии и т.д., справедливые при определенных условиях для любых материальных тел, независимо от их конкретного строения, структуры, состояния, химического состава. Уравнения данного класса подтверждены огромным количеством экспериментов, хорошо изучены и в силу этого применяются в соответствующих математических моделях как данность. Соотношения второго класса в физике и механике называют определяющими соотношениями, или физическими уравнениями, или уравнениями состояния. Соотношения этого класса устанавливают особенности поведения материальных объектов или их совокупностей (например, жидкостей, газов, упругих или пластических сред и т.д.) при воздействиях различных внешних факторов; в качестве классических примеров определяющих соотношений можно привести закон Гука в теории упругости или уравнение Клапейрона для идеальных газов. Очевидно, определяющие соотношения должны отражать реальное атомно - молекулярное строение исследуемых материальных объектов. Соотношения второго класса гораздо менее изучены, а в ряде случаев их приходится устанавливать самому исследователю (особенно - при анализе объектов, состоящих из новых материалов). Необходимо отметить, что определяющие соотношения представляют собой основной элемент, "сердцевину" любой математической модели физико-механических процессов. Именно ошибки в выборе или установлении определяющих соотношений приводят к количественно (а в некоторых случаях - и качественно) неверным результатам моделирования.

Совокупность математических соотношений указанных двух классов определяет оператор модели. В большинстве случаев оператор модели включает систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) и/или интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ). Для обеспечения корректности постановки задачи к системе ОДУ или ДУЧП добавляются начальные или граничные условия, которые, в свою очередь, могут быть алгебраическими или дифференциальными соотношениями различного порядка.

Можно выделить несколько наиболее распространенных типов задач, возникающих для систем ОДУ или ДУЧП:

- *задача Коши, или задача с начальными условиями,* в которой по заданным в начальный момент времени переменным (начальным условиям) определяются значения этих искомых переменных для любого момента времени;
- *начально - граничная, или краевая задача*, когда условия на искомую функцию выходного параметра задаются в начальный момент времени для всей пространственной области и на границе последней - в каждый момент времени (на исследуемом интервале);
- *задачи на собственные значения*, когда в формулировку задачи входят неопределенные параметры, определяемые из условия качественного изменения поведения системы (например, потеря устойчивости состояния равновесия или стационарного движения, появление периодического режима, резонанс и т.д.).

Для контроля правильности полученной системы математических соотношений следует выполнять ряд обязательных проверок:

- *Контроль размерностей,* включающий правило, согласно которому приравниваться и складываться могут только величины одинаковой размерности. При переходе к вычислениям данная проверка сочетается с контролем использования одной и той же системы единиц для значений всех параметров.
- *Контроль порядков*, состоящий из грубой оценки сравнительных порядков складываемых друг с другом величин и исключением малозначимых параметров. Например, если для выражения $x+y+z=0$ в результате оценки установлено, что для рассматриваемой области значений параметров модели $|z| << |x|$ и $|z| << |y|$, то третьим слагаемым в исходном выражении можно пренебречь.
- *Контроль характера зависимостей*: направление и скорость изменения выходных параметов модели, вытекающие из выписанных математических соотношений, должны быть такими, как это следует непосредственно из "физического" смысла изучаемой модели.
- *Контроль экстремальных ситуаций*. Весьма полезно проследить за тем, какой вид принимают математические соотношения, а также результаты моделирования, если параметры модели или их комбинации приближаются к предельно допустимым для них значениям - чаще всего к нулю или бесконечности. В подобных экстремальных ситуациях модель часто упрощается, а математические соотношения приобретают более наглядный смысл и могут быть проще проверены. Например, в задачах механики деформируемого твердого тела деформация материала в исследуемой области при изотермических условиях возможна лишь при приложении нагрузок, отсутствие нагрузок должно приводить к отсутствию деформаций.
- *Контроль граничных условий*, включающий проверку, что граничные условия действительно наложены, что они использованы в процессе построения искомого решения и что значения выходных параметров модели на самом деле удовлетворяют данным условиям.
- *Контроль физического смысла* состоит в проверке физического или иного, в зависимости от характера задачи, смысла исходных и промежуточных соотношений, появляющихся по мере конструирования модели.
- *Контроль математической замкнутости*, состоящий в проверке того, что выписанная система математических соотношений дает возможность, и притом однозначно, решить поставленную математическую задачу. Например, если задача свелась к отысканию n неизвестных из некоторой системы алгебраических или трансцендентных уравнений, то

контроль замкнутости состоит в проверке того факта, что число независимых уравнений должно быть n. Если их меньше n, то надо установить недостающие уравнения, а если их больше n, то либо уравнения зависимы, либо при их составлении допущена ошибка. Однако если уравнения получаются из эксперимента или в результате наблюдений, то возможна постановка задачи, при которой число уравнений превышает n, но сами уравнения удовлетворяются лишь приближенно, а решение ищется, например, по методу наименьших квадратов. Неравенств среди условий также может быть любое число, как это бывает, например, в задачах линейного программирования

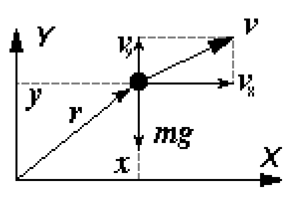
Свойство математической замкнутости системы математических соотношений тесно связано с введенным Ж. Адамаром понятием *корректно поставленной математической задачи*, то есть задачи, для которой решение *существует, единственно и непрерывно* зависит от исходных данных. В данном случае решение считается непрерывным, если малому изменению исходных данных соответствует достаточно малое изменение решения. Понятие корректности задачи имеет большое значение в прикладной математике. Например, численные методы решения оправдано применять лишь к корректно поставленным задачам. Следует отметить, что далеко не все задачи, возникающие на практике, можно считать корректными (например, так называемые обратные задачи). Доказательство корректности конкретной математической задачи является достаточно сложной проблемой, решенной только для некоторого класса математически поставленных задач. В этом отношении проверка математической замкнутости является менее сложной по сравнению с проверкой корректности математической постановки. В настоящее время активно исследуются свойства некорректных задач, разрабатываются методы их решения. Аналогично понятию корректно поставленной задачи можно ввести понятие *корректной математической модели.*

Математическая модель является корректной, если для нее выполняются все контрольные проверки: размерности, порядков, характера зависимостей, экстремальных ситуаций, граничных условий, физического смысла и математической замкнутости.

Пример

Математическая постановка задачи о баскетболисте

Математическую постановку задачи о баскетболисте можно представить как в векторной, так и в координатной форме.



А) *Векторная форма*

Найти зависимости от времени для векторных параметров *r(t)* и *v(t)* из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$m\frac{dv}{dt} = mg, \qquad v = \frac{dr}{dt} \tag{2.1}$$

при следующих начальных условиях: $r(0) = 0, \qquad v(0) = v_o$. (2.2)

Вычислить параметр Δ как $\Delta = r_x(t_k) - r_{xk}$ (2.3)

где t_k определить из следующих условий $t_k > 0, \qquad v(t_k) < 0, \qquad y(t_k) = y_k$. (2.4)

Проецируя векторные соотношения (2.1)-(2.4) на оси координат, получим математическую постановку задачи о баскетболисте в координатной форме.

Б) *Координатная форма*

Найти зависимости *x(t), y(t)* и $v_x(t)$ *и* $v_y(t)$ из решения системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &m\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad v_x = \frac{dx}{dt}, \\ &m\frac{dv_y}{dt} = -mg, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \end{aligned} \tag{2.5}$$

при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} &x(0) = x_o, \qquad && y(0) = y_o, \\ &v_x(0) = v_o\cos\alpha_o, \qquad && v_y(0) = v_o\sin\alpha_o \end{aligned}. \tag{2.6}$$

Вычислить параметр Δ как $\Delta = x(t_k) - x_k$, (2.7)

где t_k определить из условий $t_k > 0, \qquad v(t_k) < 0, \qquad y(t_k) = y_k$. (2.8)

Как можно видеть, с математической точки зрения задача о баскетболисте свелась к задаче Коши для системы ОДУ первого порядка с заданными начальными условиями. Полученная система уравнений является замкнутой, так как число независимых уравнений (4 дифференциальных и 2 алгебраических) равно числу искомых параметров задачи ($x, y, v_x, v_y, \Delta, t_k$). Существование и единственность решения задачи Коши доказана математиками. Поэтому данную математическую модель можно считать корректной.

Математическая постановка задачи еще более абстрактна, чем концептуальная, так как сводит исходную задачу к чисто математической (например, к задаче Коши), методы решения которой достаточно хорошо разработаны. Умение свести исходную проблему к известному классу математических задач и обосновать правомочность такого сведения требует высокой квалификации математика-прикладника и особенно высоко ценится в исследовательских коллективах.