

Лекция №8

Раздел 2. Этапы построения математической модели.

Концептуальная постановка задачи моделирования

В отличие от содержательной концептуальная постановка задачи моделирования, как правило, формулируется членами рабочей группы без привлечения представителей заказчика, на основании разработанного на предыдущем этапе технического задания, с использованием имеющихся знаний об объекте моделирования и требований к будущей модели.

Анализ и совместное обсуждение членами рабочей группы всей имеющейся информации об объекте моделирования позволяет сформировать *содержательную модель объекта*, являющуюся синтезом когнитивных моделей, сложившихся у каждого из членов рабочей группы. На основании содержательной модели разрабатывается уже концептуальная или "естественнонаучная" (физическая, химическая, биологическая и т.д.) постановка задачи моделирования, служащая основой для *концептуальной модели объекта*.

Концептуальная постановка задачи моделирования - это сформулированный в терминах конкретных дисциплин (физики, химии, биологии и т.д.) перечень основных вопросов, интересующих заказчика, а также совокупность гипотез относительно свойств и поведения объекта моделирования.

Наибольшие трудности при формулировке концептуальной постановки приходится преодолевать для моделей, находящихся на "стыке" различных дисциплин. Различия традиций, понятий и языков, используемых для описания одних и тех же объектов, являются очень серьезными препятствиями, возникающими при создании "междисциплинарных" моделей. Например, такие понятия как "прибыль" и "баланс" вызывают совершенно разные ассоциации у экономиста и математика-прикладника. Можно сказать, что когнитивные модели, стоящие за этими понятиями, у этих двух специалистов совершенно различны. Если экономист, говоря о прибыли и балансе, связывает с этими понятиями конкретное производство, цену и себестоимость продукции, то для математика данные понятия выглядят более формально, как результаты решения некоторых математических соотношений. При этом практически невозможно научить математика мыслить как экономиста, а экономиста - как математика. И тот, и другой способ восприятия имеет свои достоинства и недостатки. Экономист никогда не сделает ошибок, которые может натворить математик, обращаясь с параметрами модели формально, без должных знаний в рассматриваемой предметной области. С другой стороны,

используя формальные преобразования математических соотношений, математик может получить решения, которые очень сложно получить экономисту, пользующемуся своими подходами и методами (обычно - более простыми с точки зрения математики). Поэтому эффективность деятельности рабочей группы в большой степени зависит от способности ее членов поставить себя на место специалиста другого профиля, изучить его точку зрения (т.е. особенности его когнитивной модели) и найти некоторый компромисс, учитывающий все ценное.

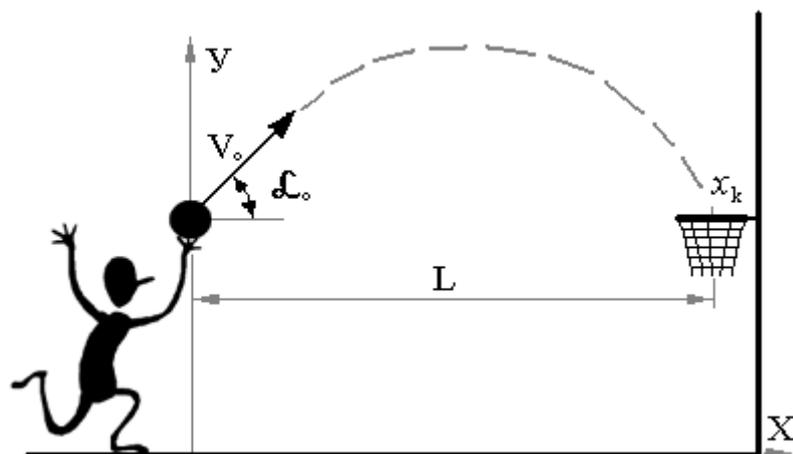
Как отмечалось выше, концептуальная модель строится как некоторая идеализированная модель объекта, записанная в терминах конкретных (например, естественнонаучных) дисциплин. Для этого формулируется совокупность гипотез о поведении объекта, его взаимодействии с окружающей средой, изменении внутренних параметров. Как правило, эти гипотезы правдоподобны в том смысле, что для их обоснования могут быть приведены некоторые теоретические доводы и экспериментальные данные, основанные на собранной ранее информации об объекте. В выборе и обосновании принимаемых гипотез в значительной степени проявляется искусство, опыт и накопленные знания членов рабочей группы. На основании принятых гипотез определяется множество параметров, описывающих состояние объекта, а также перечень законов, управляющих изменением и взаимосвязью этих параметров между собой.

Пример Концептуальная постановка задачи о баскетболе

Движение баскетбольного мяча может быть описано в соответствии с законами классической механики Ньютона.

Примем следующие гипотезы:

- объектом моделирования является баскетбольный мяч радиуса R ;
- мяч будем считать материальной точкой массой m , положение которой совпадает с центром масс мяча;
- движение происходит в поле сил тяжести с постоянным ускорением свободного падения g и описывается уравнениями классической механики Ньютона;
- движение мяча происходит в одной плоскости, перпендикулярной поверхности Земли и проходящей через точку броска и центр корзины;
- пренебрегаем сопротивлением воздуха и возмущениями, вызванными собственным вращением мяча вокруг центра масс.



В соответствии с изложенными гипотезами в качестве параметров движения мяча можно использовать координаты (x и y) и скорость (ее проекции v_x и v_y) центра масс мяча. Тогда для определения положения мяча в любой момент времени достаточно найти закон движения центра масс мяча, т.е. зависимость координат x и y и проекций вектора скорости v_x и v_y центра мяча от времени. В качестве оценки точности броска D можно рассматривать величину расстояния по горизонтали (вдоль оси x) от центра корзины до центра мяча, когда последний пересекает горизонтальную плоскость, проходящую через плоскость кольца корзины.

С учетом вышеизложенного можно сформулировать концептуальную постановку задачи о баскетболисте в следующем виде:

Определить закон движения материальной точки массой m под действием силы тяжести, если известны начальные координаты точки x_0 и y_0 , ее начальная скорость v_0 и угол бросания α_0 . Центр корзины имеет координаты x_k и y_k . Вычислить точность броска $D=x(t_k)-x_k$, где t_k определяется из условий:

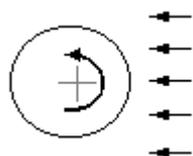
$$t_k > 0, v_y < 0, y(t_k) = y_k.$$

Рассмотрим особенности приведенной в примере концептуальной постановки задачи о баскетболисте. Первая из перечисленных гипотез особенно важна, так как она выделяет объект моделирования. В данном случае объект можно считать простым. Однако, в качестве объекта моделирования можно рассматривать систему ИГРОК-МЯЧ-КОЛЬЦО. Требуемая для описания подобной системы модель будет уже намного сложнее, так как ИГРОК в свою очередь представляет сложную биомеханическую систему и его моделирование является далеко не тривиальной задачей. В данной ситуации выбор в качестве объекта моделирования только МЯЧА обоснован, так как именно его движение требуется исследовать, а влияние ИГРОКА можно учесть достаточно просто через начальные параметры броска. Для сложных систем

выбор объекта моделирования является далеко не простой и не однозначной задачей.

Гипотеза о том, что мяч можно считать материальной точкой, широко применяется для исследования движений тел в механике. В данном случае она оправдана в силу симметрии формы мяча и малости радиуса мяча по сравнению с характерными расстояниями его перемещения. Предполагается, что мяч является шаром с одинаковой толщиной стенки.

Гипотезу о применимости в данном случае законов классической механики можно обосновать огромным экспериментальным материалом, связанным с изучением движения тел вблизи поверхности Земли со скоростями много меньше скорости света. Учитывая, что высота полета мяча лежит в пределах от 5 до 10 метров, а дальность - от 5 до 20 метров, предположение о постоянстве ускорения свободного падения также представляется обоснованным. Если бы моделировалось движение баллистической ракеты при дальности и высоте полета более 100 км, то пришлось бы учитывать изменение ускорения свободного падения в зависимости от высоты и широты места.



Гипотеза о движении мяча в плоскости, перпендикулярной поверхности Земли, ограничивает класс рассматриваемых траекторий и значительно упрощает модель. Траектория мяча может не лежать в одной плоскости, если при броске он сильно подкручивается вокруг вертикальной оси. В этом случае скорость точек поверхности мяча относительно воздуха на различных сторонах мяча будут различны. Для точек, движущихся навстречу потоку, относительная скорость выше, а с противоположной стороны, движущихся по потоку, - ниже скорости центра масс мяча. В соответствии с законом Бернулли, давление газа на поверхность больше там, где его относительная скорость меньше. Поэтому для ситуации, изображенной на рисунке, на мяч будет действовать дополнительная сила, направленная (для данной схемы) сверху вниз. Данный эффект будет проявляться тем больше, чем больше скорость центра масс мяча и скорость его вращения. Для баскетбола характерны относительно низкие скорости полета мяча (до 10 м/с). При этом практически не используется подкрутка мяча рукой. Поэтому гипотеза о движении мяча в одной плоскости кажется оправданной. Ее использование позволяет отказаться от построения значительно более сложной трехмерной модели движения мяча.

Гипотеза об отсутствии влияния сопротивления воздуха наименее обоснована. При движении тела в газе или жидкости сила сопротивления увеличивается с ростом скорости

движения. Учитывая невысокие скорости движения мяча, его правильную обтекаемую форму и малые дальности бросков, указанная гипотеза может быть использована с тщательной последующей проверкой получаемых результатов по отношению к экспериментальным результатам.

Следует отметить, что концептуальная постановка задачи моделирования в отличие от содержательной постановки использует терминологию конкретной дисциплины (в данном случае - механики). При этом моделируемый реальный объект (мяч) заменяется его механической моделью (материальной точкой). Фактически в рассматриваемом примере концептуальная постановка свелась к постановке классической задачи механики о движении материальной точки в поле сил тяжести. Концептуальная постановка более абстрактна по отношению к содержательной, так как материальной точке можно сопоставить произвольный материальный объект, брошенный под углом к горизонту: футбольный мяч, ядро, камень или артиллерийский снаряд.