

Лекция №6

Раздел 1. Основные понятия. Технологии построения моделей.

КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Классификация в зависимости от целей моделирования

Целью *дескриптивных моделей* (от лат. *descriptio* - описание) является построение законов изменения параметров модели. В качестве примера такой модели можно привести модель движения материальной точки под действием приложенных сил, использующая второй закон Ньютона. Задавая положение и скорость точки в начальный момент времени (входные параметры), массу (собственный параметр) и закон изменения прикладываемых сил (внешние воздействия), можно определить скорость и координаты материальной точки в любой момент времени (выходные параметры). Полученная модель *описывает* зависимость выходных величин от значений входных параметров. Поэтому дескриптивные модели являются реализацией описательных и объяснительных содержательных моделей на формальном уровне моделирования.



Рис. 6 Цели моделирования

В качестве другого примера дескриптивной модели можно привести модель движения ракеты после старта с поверхности земли. В качестве параметров модели в данном случае могут выступать начальное положение и начальная скорость ракеты (входные), ее начальная масса, импульс двигателя, режим его работы (собственные параметры), закон изменения сил притяжения и сил сопротивления атмосферы (внешние воздействия). В качестве выходных величин имеем положение и скорость центра масс ракеты и ее ориентацию в пространстве в произвольный момент времени.

Оптимизационные модели предназначены для определения оптимальных (наилучших) с точки зрения некоторого критерия параметров моделируемого объекта или же для поиска оптимального (наилучшего) режима управления некоторым процессом. Часть параметров модели относят к *параметрам управления*, изменяя которые можно получать различные варианты наборов значений выходных величин. Как правило, данные модели строятся с

использованием одной или нескольких дескриптивных моделей и включают некоторый критерий, обеспечивающий сравнение различных вариантов наборов значений выходных величин между собой с целью выбора наилучшего. На область значений входных параметров могут быть наложены ограничения в виде равенств и неравенств, связанные с особенностями рассматриваемого объекта или процесса. Целью оптимизационных моделей является поиск таких допустимых параметров управления, при которых критерий выбора достигает своего “наилучшего значения”.

Примером оптимизационной модели может служить моделирование процесса запуска ракеты с поверхности земли с целью подъема ее на заданную высоту за минимальное время при ограничениях на величину импульса двигателя, время его работы, начальную и конечную массу ракеты. Математические соотношения дескриптивной модели движения ракеты выступают в данном случае в виде ограничений типа равенств.

Управленческие модели применяются для принятия эффективных управленческих решений в различных областях целенаправленной деятельности человека. Следует отметить, что принятие решений в общем случае является процессом, по своей сложности сравнимым с процессом мышления в целом. Однако на практике под “принятием решений” обычно понимается выбор некоторых альтернатив из заданного их множества, а общий процесс принятия решений представляется как последовательность таких выборов альтернатив. Например, на предприятии освободилось должностное место главного инженера, и задача директора состоит в выборе из имеющегося множества кандидатов на данную должность одного, отвечающего заданным требованиям. Сложность данной задачи заключается в наличии неопределенности как по исходной информации (неполные данные о кандидатах) и характеру воздействия внешних условий (случайное: выбранный кандидат заболел или отказался; игровое: министерство против выбранной кандидатуры), так и по целям (противоречивые требования к выбираемой кандидатуре: должен быть хорошим специалистом и администратором, опытен, энергичен, молод и прочее). Поэтому в отличие от оптимизационных моделей, где критерий выбора считается определенным и искомое решение устанавливается из условий его экстремальности, в управленческих моделях необходимо введение специфических критериев оптимальности, которые позволяют проводить сравнение альтернатив при различных неопределенностях задачи. Поскольку оптимальность принятого решения даже в одной и той же ситуации может пониматься по-разному, вид критерия оптимальности в управленческих моделях заранее не фиксируется. Именно в этом состоит основная особенность данных моделей. Методы формирования критериев оптимальности в зависимости от вида неопределенности рассматриваются в теории выбора и принятия решений, которая базируется на теории игр и исследовании операций.

Классификация в зависимости от методов исследования

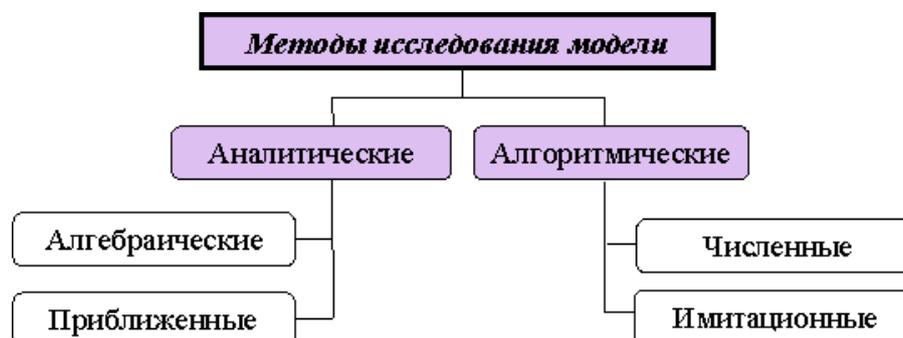


Рис. 7 Методы исследования

Метод исследования модели относят к *аналитическим*, если он позволяет получить выходные величины в виде *аналитических выражений*, т.е. выражений, в которых используется не более чем счетная совокупность арифметических операций и переходов к пределу по натуральным числам. Примеры аналитических выражений:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k x^k}{x^k + 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Частным случаем аналитических выражений являются *алгебраические выражения*, в которых используется конечное или счетное число арифметических операций, операций возведения в целочисленную степень и извлечения корня. Примеры алгебраических выражений:

$$ax^2 + bx + c, \quad a + b\sqrt{x^3 + 4ac}.$$

На практике для оценки величины параметра моделирования приходится ограничивать количество членов совокупности арифметических операций в аналитических выражениях некоторым конечным числом. Поэтому величина оценки параметра в этом случае получается приближенной, а модели, использующие подобный прием, называются *приближенными*.

Аналитические методы исследования модели являются более ценными в том плане, что позволяет с меньшими вычислительными затратами изучить свойства объекта моделирования, применяя традиционные хорошо развитые математические методы анализа аналитических функций. Существенно, что применение аналитических методов возможно без использования ЭВМ. Кроме того, знание аналитического выражения для искомых параметров позволяет исследовать фундаментальные свойства объекта, его качественное поведение, строить новые гипотезы о его внутренней структуре. Следует отметить, что возможности аналитических методов существенно зависят от уровня развития соответствующих разделов математики.

К сожалению, существующие в настоящее время математические методы позволяют получить аналитические решения лишь для относительно несложных математических моделей в узком диапазоне значений параметров. В большинстве случаев при исследовании моделей приходится использовать алгоритмические подходы, позволяющие получить лишь приближенные значения искомых параметров.

При *численном подходе* совокупность математических соотношений модели заменяется конечномерным аналогом. Это чаще всего достигается дискретизацией исходных соотношений, то есть переходом от функций непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента. После дискретизации исходной задачи выполняется построение вычислительного алгоритма, то есть последовательности арифметических и логических действий, выполняемых на ЭВМ и позволяющих за конечное число шагов получить решение дискретной задачи. Полученное решение дискретной задачи принимается за приближенное решение исходной математической задачи.

Степень приближения получаемых с помощью численного метода искомых параметров модели зависит как от *погрешностей самого метода*, связанных с заменой исходной модели ее дискретным аналогом, так и от *ошибок округления*, возникающих при выполнении любых расчетов на ЭВМ в связи с конечной точностью представления чисел в ее памяти. Основным требованием к вычислительному алгоритму является необходимость получения решения исходной задачи с заданной *точностью* за конечное число шагов.

К настоящему времени круг вопросов, связанных с разработкой и использованием численных методов, а также с построением на их основе вычислительных алгоритмов, выделился в самостоятельный быстро развивающийся и обширный раздел математики — *вычислительную математику*.

Если при численном подходе дискретизации подвергалась полученная система математических соотношений, то при *имитационном подходе* на отдельные элементы разбивается сам объект исследования. В этом случае система математических соотношений для объекта-системы в целом не записывается, а заменяется некоторым алгоритмом, моделирующим ее поведение и учитывающим взаимодействие друг с другом моделей отдельных элементов системы. В качестве моделей отдельных элементов могут быть использованы как аналитические, так и алгебраические модели.

Алгоритмические модели, использующие как численный, так и имитационный подход, не позволяют получить решения задач в аналитической форме, что затрудняет и усложняет процесс анализа результатов моделирования. Так как применение моделей данного типа возможно лишь при наличии вычислительной техники, то их эффективность зависит от мощности и быстродействия ЭВМ. Несомненным достоинством алгоритмических моделей

является отсутствие принципиальных ограничений на сложность модели, что позволяет применять их для исследования систем произвольной сложности.

Использование математической модели, построенной с применением алгоритмических методов, аналогично проведению экспериментов с реальным объектом, только вместо реального эксперимента с объектом проводится *вычислительный эксперимент* с его моделью. Задаваясь конкретным набором значений исходных параметров модели, в результате вычислительного эксперимента получают конкретный набор приближенных значений искомых параметров. Для исследования поведения объекта при новом наборе исходных данных необходимо проведение нового вычислительного эксперимента.